# TD14 : variables aléatoires réelles (discrètes)

**Exercice 1.** Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules bleues. On tire une boule en la remettant à chaque fois, jusqu'à ce ce qu'on obtienne une boule bleue.
On note $X$ le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule bleue (défini comme 0 si on ne tire jamais une boule bleue).
Déterminer la loi de $X$.

**Exercice 2.** On considère une pièce dont la probabilité de faire pile est $p \in ]0;1[$. On pose $q = 1-p$.
On lance une fois la pièce, on note le résultat, puis on relance la pièce jusqu'à obtenir un résultat différent du premier. On note $X$ le nombre de lancers nécessaires en tout. Par exemple : pour la séquence PPPF, on obtient $X = 4$.
Déterminer la loi de $X$.

**Exercice 3.** On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{2}{3}$ tandis que celle de faire face est $\frac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants. On note $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois, de deux piles consécutifs (on suppose que cet évènement arrive, ce qui est presque sûrement le cas, ainsi la variable aléatoire $X$ est bien définie). Par exemple, au cours des lancers PFFPFPP..., on a $X = 7$. Soit $n$ un entier naturel non nul, on note $p_n$ la probabilité de l'événement $[X = n]$.

1. Expliciter les événements $[X = 1], [X = 2], [X = 3], [X = 4]$. Déterminer $p_1, p_2, p_3, p_4$.
2. En distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que : $\forall n \geqslant 3$,
$$p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$
3. En déduire la loi de X.

**Exercice 4.** $\big($*On admet que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2).\big)$
Une urne contient au départ une boule blanche. On lance plusieurs fois une pièce équilibrée. Tant qu'on obtient "Face", on ajoute une boule noire dans l'urne et on relance la pièce. Lorsqu'on obtient "Pile", on tire une boule de l'urne et on s'arrête.
On suppose que le jeu s'arrête (ce qui arrive presque sûrement).
Soit alors $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne au moment du tirage. On note $B$ l'événement "On obtient la boule blanche lors du tirage".

1. Déterminer $P(X = n)$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer $P_{[X=n]}(B)$.
   (b) Quelle est la probabilité qu'on obtienne la boule blanche ?

**Exercice 5.** Pour les exercices 1, 2 et 3, montrer que $X$ admet une espérance et calculer $E(X)$.

**Exercice 6.** Soit X la VAR définie dans l'exercice 1. Montrer que les variables aléatoires $Y = 2-3X$ et $Z = X(X-1)$ admettent chacune une espérance que l'on calculera.

**Exercice 7.** Une boîte contient une boule blanche et deux boules noires. On tire une boule, on note sa couleur $B$ ou $N$, on la remet dans la boîte et on recommence le processus indéfiniment. On note $X$ le numéro d'apparition de la première boule noire, et $Y$ celui de la première boule blanche. Par exemple, pour un tirage de la forme $NNBNBBN\ldots$, on a $X = 1$ et $Y = 3$.

1. Déterminer les lois de $X$ et $Y$.
2. Montrer que $X$ et $Y$ admettent une espérance, que l'on calculera.
3. Montrer que la variable aléatoire $e^X$ admet une espérance, que l'on calculera.
4. Montrer que la variable aléatoire $e^Y$ n'admet pas d'espérance.

**Exercice 8.** Pour l'exercice 1, montrer que $X$ admet une variance et calculer $V(X)$.

**Exercice 9.** On tire simultanément deux cartes parmi un jeu de 32 cartes. Soit $X$ le nombre de rois parmi ces deux cartes.

1. (a) Déterminer la loi de $X$ et son espérance.
   (b) Calculer l'écart-type de $X$.
2. On mise deux euros avant de tirer les deux cartes. On reçoit alors une quantité de $a$ euro(s) par roi tiré.
   On note $G$ le gain de ce jeu (éventuellement négatif).
   (a) Exprimer $G$ en fonction de $X$ et de $a$.
   (b) Calculer l'espérance de $G$.
   Pour quelle valeur de $a$ le jeu devient-il profitable au joueur ?
   (c) Calculer la variance de $G$.

**Exercice 10.** Montrer que la variable aléatoire de l'exercice 1 admet une variance, et la calculer.

**Exercice 11.** Une urne contient 50 boules numérotées par $0, 2, 4, 6, \ldots, 96, 98$. On pioche une boule au hasard. Soit $X$ le numéro de la boule. On note $Y$ la variable aléatoire $\frac{X}{2} + 1$.

1. Déterminer la loi de $Y$, puis son espérance et sa variance.
2. En déduire l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 12.** Une classe de 10 étudiants passent un concours. On considère que les résultats des étudiants sont mutuellement indépendants, et que chaque étudiant a la probabilité $0,55$ d'être admis. Soit $X$ le nombre d'étudiants admis et $Y$ le nombre d'étudiants refusés.

1. Déterminer les lois de $X$ et $Y$, puis leur espérance et leur variance.
2. Calculer les probabilités des évènements suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{"aucun étudiant n'est reçu"}, \\ E_2 &= \text{"8 étudiants exactement sont reçus"}, \\ E_3 &= \text{"au moins 3 étudiants sont reçus"}. \end{aligned}$$

**Exercice 13.** Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On tire successivement $n$ boule(s) avec remise. Chaque fois qu'on tire une boule blanche, on gagne 2 points, chaque fois qu'on tire une boule noire, on perd 3 points. Soit $X_n$ le nombre de boules blanches tirées et $Y_n$ le nombre de points gagnés (éventuellement négatif).

1. Déterminer la loi de $X_n$, puis son espérance et sa variance.
2. Exprimer $Y_n$ en fonction de $X_n$, puis en déduire son espérance et sa variance.

**Exercice 14.** Soit $n$ un entier strictement positif. Une usine construit des piles par boîtes de $n$ pile(s), au moyen de deux machines $A$ et $B$. Chaque pile a 10% de chances d'être défectueuse si elle a été produite par $A$, contre 20% si elle a été produite par $B$. Pour cette raison (entre autres), la machine $A$ assure les $\frac{3}{4}$ de la production.
On prend une boîte de piles au hasard. Soit $X$ le nombre de piles défectueuses dans la boîte.

1. Déterminer la loi de $X$ puis son espérance.
2. La boîte ne contient aucune pile défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle ait été produite par la machine $A$. Quelle est la limite de cette probabilité quand $n$ tend vers l'infini ?

**Exercice 15.** On lance indéfiniment une pièce ayant la probabilité $\frac{1}{4}$ de tomber sur pile. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $T_n$ le nombre de lancers nécessaires pour obtenir $n$ pile(s). Par exemple, pour le tirage $FFPFPFFFP\ldots$, on a $T_1 = 3, T_2 = 5, T_3 = 9, \ldots$

1. Reconnaître la loi de $T_1$ et calculer $E(T_1)$.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, reconnaître la loi de $T_n - T_{n-1}$ et calculer son espérance.
3. En déduire l'espérance de $T_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

**Exercice 16.** Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On considère un réel strictement positif $\alpha$. Montrer que la variable $Y = \alpha^X$ admet une espérance et la calculer.