TD8 : matrices et systèmes linéaires

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les matrices $C = A + B, D = 3A, E = 4A - 3B$.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Existe-t-il des nombres réels a, b et c tels que $X = aA + bB + cC$? Si oui, déterminer-les.
2. Même question pour Y.

Exercice 3. Calculer le produit matriciel AB dans les cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A et B sont diagonales, alors le produit AB aussi.
2. Montrer que si A et B sont triangulaires supérieures, alors AB aussi.

Exercice 5. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $A^2 = 9I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

   Calculer $B^2 + B - 2I_3$. En déduire que B est inversible et déterminer son inverse.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

   Calculer $C^2 - 2C$. En déduire que C n'est pas inversible (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 7. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -11 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système (S) suivant (d'inconnues x, y et z) :

$$(S) \begin{cases} x - y + z = a, \\ x + 2y + z = b, \\ x + y + 2z = c. \end{cases}$$

En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

Exercice 9. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

En déduire la solution du système $\begin{cases} x + 2y & = 5, \\ 2x + 3y & = -1. \end{cases}$

Exercice 10. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec D.
   (b) On admet que les matrices M' qui commutent avec D sont les matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les matrices de la forme $M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ où (a, b, c) parcourt $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer l'ensemble des matrices M qui commutent avec A.

Exercice 11. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 3A$. En déduire par récurrence que $A^n = 3^{n-1}A$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. (a) Calculer B^2, B^3, B^4. Quelle conjecture peut-on faire sur B^n ?
   (b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer l'existence de suites (a_n) et (b_n) telles que
$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \tag{1}$$
pour tout $n \geqslant 0$.
2. Montrer que $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
   En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n, puis l'expression de A^n en fonction de n.
3. Pour $n = -1$, l'égalité (1) est-elle toujours valide ?

Exercice 13. Reprenons l'exercice 10.
Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 1$ (on précisera tous les coefficients).

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.
Calculer B^2, puis montrer que $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}B$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 15. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A. (a) Déterminer un réel a tel que $A = aI_3 + B$.
   (b) Calculer B^2, B^3. En déduire B^k pour tout $k \geqslant 3$.
   (c) En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geqslant 2$.

B. On définit trois suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) par récurrence comme suit : $(a_0, b_0, c_0) = (1, -1, 1)$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} & = 2a_n + b_n - 2c_n, \\ b_{n+1} & = 2b_n + 4c_n, \\ c_{n+1} & = 2c_n \end{cases}$$

pour tout $n \geqslant 0$. On note maintenant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \geqslant 0$. En déduire l'expression de X_n en fonction de n.
   (b) En déduire les expressions explicites des suites (a_n), (b_n) et (c_n) en fonction de n.