TD12 : séries numériques

Exercice 1. On considère la série numérique $S = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{2n+1}{(n^2+n)^2}$. On note S_n la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k^2+k)^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\frac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ pour tout $k \geqslant 1$, puis en déduire l'expression explicite de S_n (en fonction de n) pour tout $n \geqslant 1$.
2. En déduire la convergence de S et calculer sa somme.

Exercice 2. Cet exercice a pour but de (re)démontrer que la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Soit S_n la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Vérifier que $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 2$. En déduire que $S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Exercice 3. Cet exercice a pour but de (re)démontrer que la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ (aussi nommée série harmonique) diverge vers $+\infty$.
Soit H_n sa n-ième somme partielle pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. En déduire que la série harmonique diverge vers $+\infty$.

Exercice 4. Déterminer si les séries suivantes sont absolument convergentes, puis si elles sont convergentes.

$$A = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n}, \qquad B = \sum_{n\geqslant 0} \frac{-1}{3^n}, \qquad C = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{3^k}.$$

Exercice 5. Soit $S = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$. Le but de cet exercice est de montrer que S converge bien qu'elle ne soit pas absolument convergente.

1. Montrer que S ne converge pas absolument.
2. Soit S_n la n-ième somme partielle de S pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Tournez la page S.V.P.

(b) En déduire que S converge.

Exercice 6. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

$$A = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4^n}, \qquad B = \sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{4^k}, \qquad C = \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{4^n}, \qquad D = \sum_{n\geqslant 1} \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

$$E = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}, \quad F = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} \times n}{3^{n-1}}, \quad G = \sum_{n\geqslant 2} \frac{2n+3}{5^n}, \quad H = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!},$$

$$I = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n n!}.$$

Exercice 7. Montrer que

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

pour tout $x \geqslant 0$.