TD13 : probabilités sur un univers infini

Exercice 1. On considère une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir 'face' est $\frac{2}{5}$. Deux joueurs A et B lancent alternativement la pièce, le joueur A commençant le jeu (A fait le premier lancer, B le deuxième, A le troisième, etc...).

Le premier qui obtient 'face' a gagné. Les lancers sont indépendants.

Pour $k \geq 1$, on considère les événements $F_k =$ "Le $k^{\text{ième}}$ lancer tombe sur 'face'" et $T_k =$ "Le jeu se termine au bout du $k^{\text{ième}}$ lancer."

On considère également les événements $G_A =$ "Le joueur A gagne le jeu" et $G_B =$ "Le joueur B gagne le jeu".

1. Pour tout $k \geq 1$, exprimer T_k en fonction des événements $F_1, F_2, \dots, F_k$.
Déterminer $P(T_k)$ en fonction de k .
2. Exprimer l'évènement G_A en fonction des événements $T_k, k \geq 1$.
Quelle est la probabilité que le joueur A gagne le jeu ?
3. Calculer de façon analogue la probabilité que le joueur B gagne le jeu.
4. Calculer la probabilité que le jeu se termine.

Exercice 2. Un joueur lance deux dés équilibrés de couleurs différentes. Si la somme des dés vaut 2, 3 ou 12, le joueur a perdu. Si la somme vaut 7 ou 11, le joueur a gagné. Dans les autres cas, le joueur continue de lancer les dés.

1. Le joueur lance les dés une fois. Quelle est la probabilité qu'il gagne à ce lancer ? qu'il perde à ce lancer ?
2. (a) Soit $i \geq 1$. Déterminer la probabilité de gagner le jeu au $i^{\text{ième}}$ lancer.
(b) Déterminer la probabilité de gagner le jeu.
3. Déterminer la probabilité de perdre le jeu.
4. Déterminer la probabilité que le jeu se termine.

Exercice 3. Trois joueurs A, B et C lancent à tour de rôle (d'abord A , puis B , puis C) deux pièces équilibrées. Le premier joueur qui obtient deux 'piles' gagne.

1. Pour tout $i \geq 1$, on note S_i l'évènement "Le $i^{\text{ième}}$ lancer est gagnant." Déterminer $P(S_i)$.
2. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne ? que le joueur B gagne ?
3. (a) Pour $n \geq 1$, on note D_n l'évènement "Après n lancers, le jeu continue." Déterminer $P(D_n)$.
(b) Comparer les événements D_n et D_{n+1} . En déduire la probabilité que le jeu se poursuive indéfiniment.
4. En déduire la probabilité que le joueur C gagne.

Exercice 4. Soit n un entier strictement positif. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0, 1[$ (on suppose de plus que la pièce n'est pas équilibrée, c'est-à-dire $p \neq \frac{1}{2}$). On pose $q = 1 - p$.

On note P_k l'évènement "On fait pile au $k^{\text{ième}}$ lancer" et F_k l'évènement "On fait face au $k^{\text{ième}}$ lancer."

Soit A_n l'évènement "Lors des n lancers, si on obtient face à un lancer donné, on n'obtient pas pile au lancer suivant."

1. Montrer que $P(A_n) = \sum_{k=0}^n q^k p^{n-k}$. En déduire que $P(A_n) = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$.
2. On lance la pièce indéfiniment.
On note $A =$ "'Face' n'est jamais suivi de 'pile'."
Exprimer A en fonction des événements $A_n, n \geq 1$, puis calculer $P(A)$.