Mathématiques TD5 :
Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 1. 55% d'une population donnée a des cheveux bruns, 42% a des yeux bleus, 27% n'a ni des cheveux bruns ni des yeux bleus. On prend une personne de cette population au hasard. Calculer la probabilité :

1. qu'elle ait des cheveux bruns et des yeux bleus ;
2. qu'elle soit brune sachant qu'elle a des yeux bleus ;
3. qu'elle ait des yeux bleus sachant qu'elle est brune ;
4. qu'elle ait des yeux bleus sachant qu'elle n'est pas brune.

Exercice 2. Dans une boîte se trouvent 10 boules : 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules, avec les règles suivantes :

— si on tire une boule noire, on l'enlève de la boîte ;

— si on tire une boule blanche, on l'enlève et on place une nouvelle boule noire dans la boîte.

Calculer la probabilité :

1. de tirer 3 boules blanches d'affilée ;
2. de tirer 3 boules noires d'affilée ;
3. de tirer une boule blanche, puis une boule noire, puis encore une blanche.

Exercice 3. On interroge une population sur la construction d'un aéroport. 60% des sondés sont contres, et 70% des sondés se disant contre sont écologistes, tandis que 20% des sondés se disant pour sont écologistes. On prend un sondé au hasard. Calculer la probabilité :

1. qu'il soit écologiste ;
2. qu'il ne soit pas écologiste, en supposant qu'il soit pour la construction.

Exercice 4. On joue à pile ou face trois fois d'affilée. Soit $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ le nombre de fois qu'on a tiré pile. On tire alors k boules avec ordre et sans remise, dans un bac contenant 4 boules bleues et 2 boules rouges.

1. Pour k allant de 0 à 3, calculer la probabilité :
   (a) d'avoir tiré exactement k fois pile ;
   (b) de n'avoir tiré aucune boule rouge sachant qu'on a tiré k fois pile.
2. En déduire la probabilité de n'avoir tiré aucune boule rouge.

3. Montrer que les résultats précédents sont identiques si on a tiré les boules toujours sans remise mais cette fois-ci sans ordre.

Exercice 5. On considère un paquet de $4 \times 13 = 52$ cartes (4 as, 4 rois, 4 dames, 4 valets, 4 cartes de valeur i pour i allant de 2 à 10) et un entier n compris entre 2 et 10. On suppose que n joueurs $j_1, j_2, \ldots, j_n$ jouent au Texas hold'em (variante du poker) : deux cartes sont distribuées à j_1, puis deux cartes à j_2, ..., deux cartes à j_n.

1. Calculer la probabilité p_1 que le joueur j_1 ait reçu une paire, c'est-à-dire deux cartes de même valeur (deux rois, deux 5, etc ...).
2. Calculer la probabilité que j_2 ait reçu une paire en supposant que :
   — le joueur j_1 ait une paire ;
   — le joueur j_1 n'ait pas une paire.
3. Montrer que la probabilité p_2 que j_2 ait une paire est la même que pour j_1.
4. On veut montrer directement que n'importe quel joueur a autant de chances qu'un autre d'avoir reçu une paire, c'est-à-dire la probabilité p_1 (trouvée à la question 1.) que j_1 ait reçu une paire. Soit

   $$J = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) : \text{pour tout } k,\ c_k \text{ est l'ensemble des deux cartes de } j_k\},$$

   et, pour tout $i \in [|2, n|]$,

   $$J_i = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in J : c_i \text{ est une paire.}\}.$$

   La probabilité que le joueur j_i ait reçu une paire est donc $p_i = \frac{|J_i|}{|J|}$.

   (a) Pour tout i, montrer que la fonction

   $$\begin{aligned} f_i : J_i &\longrightarrow J_1 \\ (c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n) &\longmapsto (c_i, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_1, c_{i+1}, \ldots, c_n) \end{aligned}$$

   est bijective.

   (b) En déduire que $p_i = p_1$.