Mathématiques TD5 :
Probabilités sur un univers fini

Exercice 1. On tire deux boules parmi 9 boules numérotées de 1 à n. Soit A l'évènement "les numéros des deux boules tirées sont impairs". Calculer $P(A)$ pour les trois expériences suivantes :

1. On tire les deux boules simultanément (c'est-à-dire sans ordre ni remise).
2. On tire les deux boules l'une après l'autre, avec ordre mais sans remise.
3. On tire les deux boules l'une après l'autre, avec ordre et remise.

Exercice 2. Parmi un jeu de 36 cartes, on tire trois cartes successivement (c'est-à-dire avec ordre) **sans** remise.

1. Calculer le nombre total de tirages possibles.
2. Quelle est la probabilité de :
   (a) ne tirer aucun as ?
   (b) tirer au moins un as ?
   (c) tirer trois as ?
   (d) tirer exactement deux as ?

Exercice 3. Parmi un jeu de 36 cartes, on tire trois cartes successivement (c'est-à-dire avec ordre) **avec** remise.

1. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, soit A_i l'évènement "la i-ième carte tirée est le tout premier as du tirage", et soit B l'évènement "on ne tire jamais d'as".
   (a) Montrer que $P(B) = 1 - \sum_{i=1}^{4} P(A_i)$.
   (b) Calculer $P(A_i)$ pour tout $i \in [|1, 4|]$ et en déduire $P(B)$.
   (c) Retrouver directement la valeur de $P(B)$.
2. Pour $i \in \{2, 3, 4\}$, soit C_i l'évènement "la i-ième carte tirée est le deuxième as apparaissant dans le tirage".
   Calculer $P(C_2), P(C_3)$ et $P(C_4)$.

Exercice 4. Un plat contient 21 huîtres dont 2 sont empoisonnées. On en mange $n \in [|0, 21|]$.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité d'être intoxiqué.
2. Jusqu'à combien d'huîtres peut-on manger tout en ayant au plus une chance sur deux de tomber malade ?
   (On donne $\sqrt{41^2 - 4 \times 210} = 29$.)

Exercice 5. On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats observables est $\Omega = [|1, 2n|]$ et dont la probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifie

$$P(\{k\}) = \lambda \times 3^k$$

pour tout $k \in [|1, 2n|]$, et pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que P est entièrement définie par les valeurs $P(\{1\}), P(\{2\}), \ldots, P(\{2n\})$.
2. Montrer que λ ne peut être qu'une unique valeur qu'on exprimera en fonction de n.
3. Calculer la probabilité que le résultat de l'expérience soit un numéro pair.

Exercice 6. On considère trois journaux J_1, J_2 et J_3, on suppose que :

- 45% de la population lit J_1 ;
- 45% de la population lit J_1 ;
- 35% de la population lit J_1 ;
- 15% de la population lit J_1 et J_2 ;
- 10% de la population lit J_1 et J_3 ;
- 15% de la population lit J_2 et J_3 ;
- 5% de la population lit les trois journaux.

Calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard :

1. lise l'un des trois journaux ;
2. n'en lise aucun ;
3. lise J_1 mais pas J_2 ;
4. lise exactement deux journaux.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 1$. On dispose de n dossiers numérotés de 1 à n. On range ces dossiers au hasard dans 4 casiers étiquetés A, B, C et D.
Calculer la probabilité que :

1. le casier A soit vide ;
2. les casiers A et B soient vides ;
3. les casiers A, B et C soient vides ;
4. au moins un des casiers soit vide.