TD11 : calcul intégral

Exercice 1.

1. Soit $f : x \in]0,+\infty[\longmapsto x\ln(x)$.
   Montrer que la fonction $F : x \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de f.
2. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto (2x-3)e^{-x}$.
   Déterminer des réels a et b tels que $F : x \in \mathbb{R} \longmapsto (ax+b)e^{-x}$.

Exercice 2. Etudier la monotonie des suites suivantes :

$$a_n = \int_0^n e^{-t^2}\mathrm{d}t, \qquad b_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. Soit $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.
2. En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ pour tout n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 4. Soient $g : t \geqslant 0 \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+1}}$ et $F : x \in [0,+\infty[\longmapsto \int_x^{x+1} g(t)\mathrm{d}t$. On considère une primitive G de g.

1. (a) Exprimer F en fonction de G.
   (b) Déterminer F' et étudier les variations de F.
2. (a) Soit $x \geqslant 0$. Donner un encadrement de $g(t)$ sur l'intervalle $[x, x+1]$.
   (b) En déduire que
   $$\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+1}} \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$$
   pour tout $x \geqslant 0$, puis $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

EML 2008
Exercice 5. Soient $f : t \in]0,+\infty[\longmapsto t\ln(t) - t$ et

$$G : x \in]1,+\infty[\longmapsto \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1,+\infty[$ et que
   $$G'(x) = \frac{f(x+1)-f(x-1)}{2},$$
   $$G''(x) = \frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{2}$$
   pour tout $x > 1$.
   On fera intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

2. (a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
   (b) Vérifier que $G'(2) > 0$.
   (c) Montrer que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$.
   (d) En déduire les variations de G.

Exercice 6. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes définies par les expressions suivantes :

$$a(x) = (x+1)(x+2) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b(x) = \frac{1}{x^4} \quad (x \in]0,+\infty[), \quad c(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (x \in]0,+\infty[),$$
$$d(x) = \frac{2}{(3x-1)^2} \quad \left(x < \frac{1}{3}\right), \quad e(x) = \frac{1}{3x+4} \quad \left(x < \frac{-4}{3}\right), \quad f(x) = e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$g(x) = xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad i(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad (x > 0),$$
$$j(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \quad (x > -1), \quad k(x) = x(x^2-1)^5 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 7. A l'aide de l'exercice 6, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (x+1)(x+2)\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x, \quad I_3 = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\mathrm{d}t.$$

Exercice 8. Soit $f : t \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\} \longmapsto \frac{2t^3+6t^2+9t-4}{(t+1)^2(t-2)}$.

1. Déterminer des réels a, b et c tels que $f(t) = a + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{c}{t-2}$ pour tout $t \notin \{-1,2\}$.
2. Calculer $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 9. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Calculer I_1 en remarquant que $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) Calculer I_2.
2. (a) Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) Montrer que $I_n \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout n.
   (c) La suite (I_n) est-elle convergente ?
3. Justifier que $I_n \leqslant \int_0^1 x(1-x^n)\mathrm{d}x$ pour tout n. En déduire $\lim\limits_{n\to+} I_n$.

Exercice 10. Calculer :

$$I = \int_1^3 (2t+1)e^{2t}\mathrm{d}t, \qquad J = \int_1^2 (t^2-t+1)\ln(t)\mathrm{d}t,$$
$$K = \int_1^e \ln(t)\mathrm{d}t, \qquad L = \int_0^1 (t^2+t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 11. Soit $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $I_n \geqslant 0$ pour tout n.
3. Montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
4. En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes en effectuant les changements de variable indiqués :

$$A = \int_0^1 \frac{-x+3}{x+2}\mathrm{d}x \quad (t = x+2), \quad B = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}} \quad (t = u^2),$$

$$C = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} \quad (v = e^x) \qquad \left(\textit{on pourra utiliser que } \frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}.\right)$$

Exercice 13. Pour les intégrales suivantes, étudier la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale, et, si elles convergent, calculer leur valeur.

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4}, \quad B = \int_{0,5}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\sqrt{t})^3}, \quad C = \int_0^{+\infty} e^{2t}\mathrm{d}t, \quad D = \int_{-\infty}^0 e^{2t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 14. En effectuant un changement de variables pour se ramener à une intégralle de Riemann, étudier la convergence et calculer le cas échéant la valeur des intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)^2}, \qquad J = \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}.$$

Exercice 15. En effectuant une IPP, étudiant la convergence et calculant (le cas échéant) la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^{+\infty} te^{-2t}\mathrm{d}t$.