Mathématiques TD6 : étude locale de fonctions

Exercice 1.

1. La fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = 5x - 2 \quad \text{pour tout } x > 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

   est-elle continue en 1 ?

2. La fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x \ln^3(x)} \quad \text{pour tout } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

   est-elle continue en 0 ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \quad \text{pour tout } x \geqslant -1 \\ f(x) = x + 2 \quad \text{pour tout } x < -1. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en -1.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} \quad \text{pour tout } x \leqslant 0 \\ f(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in]0, 1] \\ f(x) = \ln(x) \quad \text{pour tout } x > 1. \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 0 et 1.

Exercice 4.

1. Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$ pour tout $x \neq 1$. Montrer que f admet un prolongement par continuité en -1.
2. La fonction $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x - 1}{3x^2 - 2x - 1}$ admet-elle un prolongement par continuité en 1 ?

Exercice 5.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - 1}{x} = -1$.

2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-1}}{x-1} & \text{pour tout } x \neq 1, \\ f(1) = -e^{-1} \end{cases}$$

est-elle continue en 1 ?

Exercice 6. Déterminer les limites en -1 et -3 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, -3\}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)(x+3)}$.

Exercice 7. Déterminer les limites en -1 et 0 de la fonction f définie sur $]-1, +\infty[\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1+x}{\ln(1+x)}$.

Exercice 8. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x},$$
$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) - \ln(x),$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)},$$
$$\lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right),$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - \sqrt{2x})}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 9. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes définies sur $]0, +\infty[$:

$$x - \ln(x),$$
$$x^2 \ln^3(x),$$
$$\frac{x^3}{e^{2x}},$$
$$x - e^x.$$