Mathématiques TD7 : étude globale de fonctions

Exercice 1. On considère les fonctions

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{7-3\ln(x)}{4} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x^2+1 \qquad\qquad h : \mathbb{R} \longrightarrow [1,+\infty[\qquad x \longmapsto g(x)$$

$$k : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x^2+1 \qquad\qquad l : [0,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[\qquad x \longmapsto x^2+1$$

1. Montrer que f est injective.
2. Les fonctions g, h et k ont-elles paires ? injectives ? surjectives ? bijective ? Ont-elles une application réciproque ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x^2 + 3x - 4$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1-3x}{4+2x}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x. À quelle condition sur y l'équation admet-elle une solution ?
2. En déduire que f réalise une bijection entre $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et un ensemble qu'on précisera. Déterminer sa fonction réciproque.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3e^{-2x+1}$. On admet que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Calculer $f(0,5)$. En déduire $f^{-1}(3)$.
2. Déterminer l'expression de f^{-1}.

Exercice 5. Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \ln\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$. On admet que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$. Donner l'expression de sa réciproque.

Exercice 6. Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité des fonctions définies par les expressions

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Exercice 7.

1. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-1/(x-1)^2} & \text{pour tout } x > 1, \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

   Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x}\ln(x) & \text{pour tout } x > 0, \\ g(x) = -3x & \text{pour tout } x \leqslant 0. \end{cases}$$

   Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} h(x) = 1 - e^{-x} & \text{pour tout } x \leqslant 0, \\ h(x) = 0 & \text{pour tout } x < 0. \end{cases}$$

   Montrer que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + x + 1$.

1. Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $\pm\infty$.
2. En déduire les ensembles $f\left(\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$, $f([-3, -1])$ et $f([-1, 2])$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser.

Exercice 10. Soit $f : [e, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser. Soit g l'application réciproque de cette bijection.
2. Etudier la continuité de g et tracer son tableau de variations. Que peut-on dire de la courbe de g ?

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}$.

1. Etudier les variations de f et ses limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier que $\alpha \in [1, 2]$.

Mathématiques TD7 : étude globale de fonctions

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}$.

1. Etudier les variations de f et ses limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier que $\alpha \in [1, 2]$.

Exercice 13. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $2x^3 - 3x^2 - 12x = 1$.

Exercice 14. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, du nombre de solutions de l'équation $x^3 + 3x^2 - 1 = m$.

EDHEC 95

Exercice 15. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x^5 + nx - 1$.

1. Etudier les variations de f_n.
2. En déduire qu'il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : nx + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n, puis que $0 < x_n \leqslant 1$.
2. Déterminer x_0.
3. (a) Montrer que $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire que $f_{n+1}(x_n) > 0$ puis que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
4. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
   (b) On rappelle que $\ln(x) \leqslant x + 1$ pour tout $x > 0$. Montrer que $x_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geqslant 1$. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.