**TD9 : l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
applications linéaires**

Exercice 1. On considère les quatre vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que v est une combinaison linéaire de u_1 et u_2 .
2. Montrer que $w \notin \text{Vect}(u_1, u_2)$.

Exercice 2. Soient u_1, u_2, u_3 et u_4 les quatre matrices suivantes :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Exercice 3. Les ensembles définis ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 3x - 5y = 0 \right\}, \quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = x^2 \right\}.$$

Exercice 4. Soit $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a + b \\ a - 2b \\ 3a \end{pmatrix}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de trois façons différentes :

1. en utilisant la définition d'un sous-espace vectoriel ;
2. en exprimant F comme un sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs que l'on précisera ;
3. en vérifiant que F est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $2x + y - z = 0$.

Exercice 5.

1. Soit $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du système

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 0 \\ x - y - 3z &= 0. \\ 3x + 3y + z &= 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 (b) Résoudre le système et en déduire une base de F .
2. Déterminer une base du sous-espace vectoriel

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : x + 2y + 3z = 0 \right\}.$$

Exercice 6. On considère les trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 2. Déterminer les coordonnées du vecteur $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base (u_1, u_2, u_3) .

Exercice 7. On considère les deux applications

$$f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad g : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y + 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sont-elles linéaires ?

Exercice 8. Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, soit f l'application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{cases} f(u_1) &= 2u_1 + u_2, \\ f(u_2) &= u_1 + u_3, \\ f(u_3) &= 4u_1 + u_2 + 2u_3, \end{cases}$$

et soit $u \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.

1. Rappeler l'expression de u en fonction de u_1, u_2 et u_3 .

2. Donner les coordonnées du vecteur $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 9. Soit

$$f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2x - 4z \\ y - 3z \end{pmatrix}.$$

Sans utiliser la définition, montrer que f est une application linéaire.

Exercice 10. Soit

$$f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. L'application f est-elle injective? Surjective? Bijective?

Exercice 11. Soit f l'application linéaire $f : X \mapsto MX$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective?
2. Déterminer un système d'équation(s) définissant $\text{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective?

Exercice 12. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .
2. On considère l'application linéaire $f : X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 - (a) Préciser le noyau et l'image de f .
 - (b) Montrer que f est bijective et donner l'expression de son application réciproque f^{-1} .