TD10 : calcul différentiel

Exercice 1. Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$.

1. En utilisant la définition de la dérivabilité, montrer que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.
2. Vérifier en utilisant les formules de dérivation.

Exercice 2.

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ en appliquant la définition de la dérivabilité à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ au point $x_0 = 0$.
2. Démontrer de la même façon que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Exercice 3.

1. En utilisant la définition de la dérivabilité, calculer $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer de la même façon $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$.

Exercice 4. Soit $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Exercice 5. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \geq 1, \\ x-1 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

Cette fonction est-elle continue en 1 ? dérivable en 1 ?

Exercice 6. Soit f le polynôme $x \in \mathbb{R} \mapsto x^4 + 4x - 1$, et soit C_f sa courbe dans le plan.

1. (a) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
(b) Déterminer l'équation de cette tangente.
2. Déterminer le point de C_f où la tangente est horizontale.
3. Déterminer les variations de f .
4. Tracer C_f .

Exercice 7. Soit $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$.
2. Interpréter graphiquement.

Exercice 8. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité ainsi que les dérivées des fonctions déterminées par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a(x) &= x^3 e^x, & b(x) &= (e^x - 2x + 1)^2, & c(x) &= \frac{e^x}{x^2 - 1}, \\ d(x) &= \sqrt{x^2 + x + 1}, & e(x) &= (e^{2x} - x^2)^3, & f(x) &= \frac{1}{(3x + 2)^5}, \\ g(x) &= \ln(1 + x^2), & h(x) &= \ln(|2x + 1|), & i(x) &= e^{x + \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Exercice 9. Soit f le polynôme $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 1$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque g sur un intervalle que l'on précisera.
2. (a) Déterminer sur quel ensemble g est dérivable et exprimer sa dérivée g' (en fonction de g) sur cet ensemble.
 (b) Déterminer $g(7)$ et en déduire $g'(7)$.
 (c) Déterminer la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -1 .

Exercice 10. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

1. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f(2)$. En déduire $(f^{-1})'(\ln(5))$.
3. Déterminer explicitement f^{-1} et en déduire l'expression de $(f^{-1})'$.
 Vérifier le résultat de la question 2.

Exercice 11.

1. Montrer que $\frac{1}{3} \leq \ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2}$ (on utilisera la valeur approchée $e \simeq 2,7$).
2. Montrer plus généralement que $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ (on étudiera les variations de deux fonctions bien choisies).

Exercice 12.

1. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto -3e^{-3x} - 9x + 9$.
 Déterminer les variations de g et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.
 En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$ en faisant intervenir α et β .
2. Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^{-3x} - \frac{9}{2}x^2 + 9x$.

Exercice 13. Soit f le polynôme $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{5}(3 + x^2)$ et $u = (u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0, 1]$ et montrer que $[0, 1]$ est un intervalle stable par f .
 (b) Déterminer l'unique point fixe r de f sur $[0, 1]$.

- (c) Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{2}{5}$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- 2. Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 0$.
- 3. Démontrer que $|u_{n+1} - r| \leq \frac{2}{5}|u_n - r|$ puis que $|u_n - r| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout $n \geq 0$. En déduire la limite de u_n .
- 4. Déterminer un entier n_0 tel que $|u_n - r| \leq 10^{-9}$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 14. Soit $f : x \in]0, +\infty[\mapsto 2 + \ln(x)$.

On donne les valeurs approchées $\ln(3) \simeq 1,10$ et $\ln(4) \simeq 1,39$.

- 1. (a) Montrer que f admet un unique point fixe α sur $[1, +\infty[$.
- (b) Montrer que $\alpha \in [3, 4]$.
- 2. (a) Etudier les variations de f et montrer que l'intervalle $[3, 4]$ est stable par f .
- (b) Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$ pour tout $x \in [3, 4]$.
- 3. Soit $u = (u_n)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.
- (a) Montrer que $u_n \in [3, 4]$ pour tout $n \geq 0$.
- (b) Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \geq 0$.
- (c) Montrer que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$. En déduire la limite de u .
- 4. Déterminer un rang n_0 à partir duquel $|u_n - \alpha| \leq 10^{-5}$.

Exercice 15. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$.

- 1. Montrer que f est de classe C^∞ .
- 2. (a) Déterminer f', f'', f''' puis conjecturer une formule pour $f^{(n)}$ pour tout $n \geq 1$.
- (b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 16. Soit $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) - x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- 1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
- 2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, calculer f' et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.
- 3. f est-elle dérivable en 0 ? De classe C^1 sur $[0, +\infty[$?

Exercice 17. Soit f le polynôme $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 3$ et soit C_f sa courbe dans le plan.

1. Etudier les variations de f (*on cherchera des racines évidentes de f'*).
2. Etudier la convexité de f . On précisera les points d'inflexion éventuels de f , ainsi que l'équation de sa tangente en ces points.
3. Tracer C_f .