Mathématiques TD4 : dénombrement 2

Exercice 1. Dans une boîte se trouvent 2 boules bleues et 3 boules rouges. On fait trois expériences aléatoires :

(a) on tire une première boule, on note le résultat, on la remet dans la boite, puis on tire une deuxième boule ;

(b) on tire deux boules l'une après l'autre, sans remettre la première boule ;

(c) on tire deux boules simultanément.

1. Pour chacune de ces trois expériences, soit Ω l'univers des résultats observables et A et B les évènements

$$A = \text{"on tire deux boules rouges,"}$$
$$B = \text{"on tire une boule bleue et une boule rouge."}$$

   Calculer le nombre d'éléments de Ω, A et B.

2. Pour chacune des deux expériences (a) et (b), calculer le cardinal de l'évènement

$$C = \text{"on tire une boule bleue, puis une boule rouge."}$$

Exercice 2. Dans une boîte se trouvent 3 boules bleues et 5 boules rouges. On fait trois expériences aléatoires :

- on tire simultanément 4 boules (c'est-à-dire sans ordre ni remise) ;
- on tire successivement (c'est-à-dire avec ordre) 4 boules sans les remettre dans la boîte ;
- on tire successivement 4 boules en les remettant dans la boîte.

Pour chacune de ces trois expériences :

1. définir l'ensemble Ω des résultats observables et calculer son cardinal ;
2. calculer la probabilité (uniforme) de tirer k boules bleues, pour $k \in [|0, 4|]$.

Exercice 3.

1. Compter le nombre d'entiers naturels s'écrivant avec deux chiffres distincts différents de 0.
2. En déduire le nombre d'entiers naturels s'écrivant avec trois chiffres distincts.

Exercice 4. Une étagère contient 7 livres.

1. On souhaite en prendre 3. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Pour chaque choix, combien y a-t-il d'ordres de lecture possibles ?

Exercice 5. On jette quatre dés à 6 faces numérotées de 1 à 6.

1. Dénombrer les résultats possibles.
2. Dénombrer les résultats comportant 4 nombres différents.
3. Dénombrer les résultats ne comportant pas le chiffre 1.
4. Dénombrer les résultats comportant au moins une fois le chiffre 1.
5. Dénombrer les résultats comportant exactement une fois le chiffre 1.

Exercice 6. Une boite contient 4 boules noires, 5 boules vertes et 6 boules rouges. On tire successivement (sans les remettre) 3 boules de la boite. On tiendra compte de l'ordre.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages sans boule rouge ?
3. Combien y a-t-il de tirages ne contenant que des boules rouges et vertes, et au moins une boule rouge et une boule verte ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant des boules des trois couleurs ?

Exercice 7. Soit $n \geqslant 3$. Une boite contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise 3 boules de la boite. Soit Ω l'ensemble des résultats possibles. On définit les évènements

$$A = \text{"la boule numéro 1 est tirée en premier,"}$$
$$B = \text{"la boule numéro 1 est tirée en deuxième,"}$$
$$C = \text{"la boule numéro 1 n'est jamais tirée,"}$$
$$D = \text{"la boule numéro 1 est tirée avant la boule numéro 2 (qui est elle aussi tirée)."}$$

Déterminer le cardinal de Ω, A, B, C, D.

Exercice 8. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot NICOLAS, puis le nombre de ces anagrammes commençant et finissant par une consonne.

Exercice 9.

1. On cherche à déterminer le nombre d'anagrammes du mot ENSEMBLE.
   (a) <u>Première méthode.</u>
      i. Considérons que les trois E sont des lettres différentes, c'est-à-dire, considérons le mot $E_1NSE_2MBLE_3$. Combien y a t il d'anagrammes possibles ?
      ii. Quel est le nombre de permutations de l'ensemble $\{E_1, E_2, E_3\}$?
      iii. En déduire le nombre d'anagrammes du mot ENSEMBLE.

(b) Deuxième méthode.

   i. Ecrire un anagramme de ENSEMBLE consiste à remplir 8 cases vides alignées avec les lettres E,N,S,E,M,B,L et E. Combien y a-t-il de façons de placer les trois E ?

   ii. Les trois E étant placés, combien y a-t-il de façons de placer les autres lettres ?

   iii. En déduire le nombre d'anagrammes du mot ENSEMBLE.

2. En utilisant l'une ou l'autre des méthodes précédentes, déterminer le nombre d'anagrammes du mot ANAGRAMME.

Exercice 10. On tire simultanément 3 boules dans une boite contenant 4 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules noires.

1. Combien de résultats différents peut-on obtenir ?
2. Calculer le nombre de cas où :
   (a) le tirage contient exactement 2 boules rouges ;
   (b) le tirage contient au moins 2 boules rouges ;
   (c) le tirage contient exactement 2 boules de la même couleur ;
   (d) le tirage contient une boule de chaque couleur ;
   (e) le tirage contient des boules d'au moins deux couleurs différentes.

Exercice 11. On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 36 cartes.

1. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
2. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant :
   (a) 4 carreaux ou 4 cœurs ?
   (b) 2 cœurs et 2 piques ?
   (c) au moins un roi ?
   (d) au plus un roi ?
   (e) 2 rois et 2 cœurs ?

Exercice 12. On considère une boite contenant 2 boules bleues et 4 boules jaunes. On tire successivement et en les remettant à chaque fois 10 boules de l'urne. A chaque fois, on donnera la formule sans calculer le résultat.

1. Dénombrer tous les résultats possibles.
2. Dénombrer les résultats où on obtient :
   (a) une boule bleue exactement ;
   (b) deux boules bleues exactement ;
   (c) au plus trois boules bleues.

Exercice 13. Développer les polynômes

$$P(x) = (4x + \sqrt{2})^3,$$
$$Q(x) = (1 - 2x)^6.$$

Exercice 14. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k = 5^n$$

pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 15. Considérons un entier $n \geqslant 1$.

1. (a) Montrer que $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ pour tout $p \in [|1, n|]$.
   (b) Déterminer la somme $S_n = \sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$ en fonction de n.
2. On considère maintenant le polynôme $P(x) = (1 + x)^n$.
   (a) Exprimer $P'(x)$.
   (b) Développer $P(x)$ en utilisant le binôme de Newton, en déduire une deuxième expression de $P'(x)$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 1.(b) en utilisant les deux questions précédentes.