Mathématiques TD4 : dénombrement 1

Exercice 1. Dans une boîte, il y a 6 jetons numérotés de 1 à 6. On tire successivement (avec ordre et sans remise) au hasard deux jetons. On modélise ce tirage sous la forme d'un arrangement (j_1, j_2) de $[|1,6|]$ (j_1 étant le numéro du premier jeton, j_2 celui du deuxième). On note T l'ensemble des tirages possibles, c'est-à-dire $T = \{(j_1, j_2) \in [|1,6|]^2 : j_1 \neq j_2\}$.

1. Dénombrer le nombre total de tirages possibles, c'est-à-dire le cardinal de T.
2. On considère les sous-ensembles A, B, C de T suivants : A est l'ensemble des tirages où le premier jeton a un numéro pair, B celui des tirages où le deuxième jeton a un numéro pair, et C celui des tirages où la somme des numéros des jetons est paire.
   (a) Ecrire les définitions formelles de A, B et C puis calculer leur cardinal.
   (b) Décrire ce que représentent les ensembles suivants puis donner leur cardinal : $\bar{A}, A\cap B, \bar{A}\cap\bar{B}, A\cup B, \bar{A}\cup\bar{B}, \overline{A\cup B}, \bar{C}, \bar{A}\cap C, \bar{A}\cap\bar{C}, A\cup C, \overline{A\cup C}$.

Exercice 2. On considère un jeu classique de 36 cartes (4 as, 4 rois, 4 dames, 4 valets, 4 cartes numérotées par i pour tout $i \in [|6,10|]$) et un entier n strictement positif. On tire n cartes successivement (l'ordre compte), en les remettant dans le paquet à chaque fois (avec remise). On modélise ce tirage sous la forme d'une n-liste $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ où, pour tout $i \in [|1,n|]$, c_i est la i-ième carte tirée. Soit T l'ensemble de ces tirages.

1. Dénombrer le nombre total de tirages possibles, c'est-à-dire le cardinal de T.
2. Pour tout $i \in [|1,n|]$, on note $V_i \subset T$ l'ensemble des tirages tels que la i-ième carte tirée est un valet, et $A_i \subset V_i$ l'ensemble des tirages tels que la i-ième carte tirée soit le tout premier valet apparaissant dans le tirage. On note également B l'ensemble des tirages où aucun valet n'apparaît, C l'ensemble des tirages où au moins un valet apparaît, et D l'ensemble des tirages où exactement un et un seul valet apparaît.
   (a) Calculer les cardinaux de V_i, A_i pour tout $i \in [|1,n|]$ et de B, C, D.
   (b) i. Exprimer A_1, A_2 et A_3 en fonction des ensembles V_1, V_2 et V_3.
   ii. Pour tout $i \in [|1,n|]$, exprimer A_i en fonction des ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_i$.
   (c) Exprimer B, C et D en fonction des ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Exercice 3. On considère deux entiers strictements positifs n et m.

1. Déterminer le nombre de bijections de $[|1, n|]$ dans $[|1, m|]$.
2. Déterminer le nombre d'injections de $[|1, n|]$ dans $[|1, m|]$.
3. Déterminer le nombre de surjections de $[|1, n|]$ dans $[|1, m|]$ quand :
   (a) $n < m$;
   (b) $n = m$;
   (c) $n = m + 1$.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1, p \geqslant 0$ et $\mathcal{M}_n^p$ le nombre de tirages de p éléments parmi n sans ordre mais avec remise (avec par convention $\mathcal{M}_n^0 = 1$ pour tout n). Le but de cet exercice est de montrer que

$$\mathcal{M}_n^p = \binom{n+p-1}{p}. \tag{1}$$

1. Montrer que $\mathcal{M}_n^p = \mathcal{M}_{n-1}^p + \mathcal{M}_{p-1}^n$ pour tous entiers strictement positifs n et p.
2. En déduire la formule (1) par récurrence sur l'entier $n + p \geqslant 1$.