

Probabilités sur un univers éventuellement infini

ECE1 2018–2019

Sommaire

1	Introduction et dénombrabilité	1
2	Notion de tribu	2
3	Probabilités	3
3.1	Définitions et premiers exemples	3
3.2	Propriétés d'une probabilité	4
4	Probabilités conditionnelles	6
5	Indépendance en probabilité	7

1 Introduction et dénombrabilité

Objectif du chapitre

On étend la notion d'espaces probabilisés à des expériences aléatoires pouvant avoir un univers des résultats Ω infini, comme par exemple jouer à pile ou face indéfiniment.
Pour définir correctement une probabilité décrivant une telle expérience, on introduit au préalable la notion de tribu, sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ avec des propriétés particulières.
On sera alors parfois amené à remplacer les objets manipulés dans le contexte d'univers finis (voir le chapitre 5) par leur pendant infini (par exemple les p -listes par des suites, les sommes de réels par des séries, etc).

Définition

Ensembles et suites dénombrable

On appelle *ensemble dénombrable* tout ensemble E tel qu'on puisse énumérer (éventuellement à l'infini) les éléments de E , c'est-à-dire :

- Soit E est fini : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (le cas $n = 0$ signifie que $E = \emptyset$).
- Soit E est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que E est de la forme

$$\{e_i : i \in \mathbb{N}\} = \{e_0, e_1, e_2, \dots\}.$$

On appelle alors *suite dénombrable* toute famille $(u_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble dénombrable I , par exemple un N -uplet $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ ou bien une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Exemple

Liste non exhaustive d'ensembles dénombrables :

- tout ensemble fini;
- tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ (en particulier $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$);
- l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Liste non exhaustive d'ensembles non dénombrables :

- $\mathbb{R}$;
- de manière générale, tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un segment $[a; b]$ avec $a < b$.
- en particulier, un segment $[a; b]$ (avec $a < b$) n'est pas dénombrable, bien que borné.

2 Notion de tribu

Définition

Tribus d'évènements et espaces probabilisables

Soit Ω un ensemble (fini ou infini). On appelle *tribu* de parties de Ω , ou encore σ -*algèbre* de parties de Ω , tout sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes.

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire : $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$.
- Si $(A_i)_{i \in I}$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors l'union $\bigcup_{i \in I} A_i$ appartient toujours $\mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont alors nommés *évènements* (sous-entendu, de l'expérience aléatoire dont Ω est l'univers des résultats).

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé *espace probabilisable*.

Remarque

L'ensemble vide et les intersections dénombrables

Les deux premières propriétés impliquent que l'ensemble vide $\emptyset$ appartient également à $\mathcal{A}$.

Les deux dernières impliquent que pour toute suite dénombrable $(A_i)_{i \in I}$, l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$ appartient toujours à $\mathcal{A}$: en effet,

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i}.$$

Remarque

Tribus en pratique

L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est clairement une tribu. Dans le chapitre 5, où Ω était un univers fini, on considérait toujours l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Cette nouvelle définition d'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu d'évènements, en est donc une extension.

En pratique, la plupart des espaces probabilisables considérés sont de la forme $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exemple 1

Lancers infinis d'un dé

On jette indéfiniment un dé à six face, on note le numéro obtenu à chaque lancer. L'univers des résultats observables peut être modélisé par l'ensemble

$$\Omega = \{(u_n)_{n \geq 1} : u_n \in [1, 6] \forall n \geq 1\}$$

où u_n est le numéro obtenu au $n^{\text{ième}}$ lancer.

On considère alors la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, autrement dit les évènements sont ici les sous-ensembles de Ω .

Pour tout $n \geq 1$, notons A_i l'évènement "On obtient un 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer", c'est-à-dire

$$A_i = \{(u_n)_{n \geq 1} \in \Omega : u_i = 6\}.$$

On a

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \{(u_n) \in \Omega : \exists i \geq 1, u_i = 6\} = \text{"On tire au moins une fois un 6"} \in \mathcal{A},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i = \{(u_n) \in \Omega : u_i \neq 6 \forall i \geq 1\} = \text{"On ne tire jamais un 6"} \in \mathcal{A},$$

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \{(u_n) \in \Omega : u_i = 6 \forall i \geq 1\} = \{(6, 6, 6, \dots)\} = \text{"On tire tout le temps un 6"} \in \mathcal{A},$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i = \{(u_n) \in \Omega : \exists i \geq 1, u_i \neq 6\} = \text{"On tire au moins une fois autre chose qu'un 6"} \in \mathcal{A}.$$

Définition

Evènements incompatibles et systèmes complets d'évènements

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

Comme dans le chapitre 5, on dit que deux évènements $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.

Comme généralisation de la notion du chapitre 5, on appelle *système complet d'évènements* toute suite dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements incompatibles deux à deux (c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$) vérifiant

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega.$$

Exemple

Lancers infinis d'un dé

Reprenons l'exemple 1.

Pour tout $i \geq 1$, notons B_i l'évènement "On obtient un 6 pour la première fois au $i^{\text{ème}}$ lancer," c'est-à-dire

$$B_i = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{i-1}} \cap A_i = \{(u_n) \in \mathcal{A} : u_i = 6 \text{ et } u_n \neq 6 \forall n < i\}.$$

Notons enfin

$$B_\infty = \{(u_n) \in \Omega : u_n \neq 6 \forall n \geq 1\} = \text{"On ne tire jamais un 6"}.$$

Il est clair que les évènements $(B_i)_{i \geq 1}$ et B_∞ forment un système complet d'évènements.

3 Probabilités

3.1 Définitions et premiers exemples

Définition

Probabilités et espaces probabilisés

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisé.

On appelle *probabilité* sur $\mathcal{A}$ toute fonction

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

1 $P(\Omega) = 1$.

2 Pour toute suite $(A_n)_{n \geq n_0}$ d'évènements incompatibles deux à deux (c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$), la série $\sum_{n \geq n_0} P(A_n)$ converge et

$$P\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n).$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, le réel $P(A) \in [0, 1]$ est nommé *probabilité de A*.

La donnée $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est nommée *espace probabilisé*.

Remarque

σ -additivité

La condition 2 est nommée σ -additivité de P : on dit que la fonction P est σ -additive.

Remarque

Cas d'un univers fini

Cette définition est une généralisation de celle donnée dans le chapitre 5, dans le sens où : si Ω est un univers fini et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, les deux définitions sont équivalentes.

Exemple 2

Pile ou face éventuellement infini

On joue à pile ou face avec une pièce de la façon suivante : si on obtient "face" lors d'un lancer, alors on relance la pièce, sinon on arrête de jouer.

L'univers des résultats observables peut être modélisé par l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} = \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$, un entier $n \geq 1$ correspondant au résultat où on a tiré "face" $n - 1$ fois puis finalement "pile" au $n^{\text{ème}}$ lancer (d'où l'arrêt du jeu), et le symbole ∞ correspondant au résultat où on n'a jamais tiré "pile".

On pose $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, puis l'on définit une application P sur de la façon suivante : pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$P(A) = \sum_{n \in A \cap \mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

Il est facile de montrer que P est à valeurs dans $[0, 1]$, et constitue une probabilité sur $\mathcal{A}$.

Elle décrit l'expérience où la pièce est truquée et une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur "face" à chaque lancer.

Par exemple, pour tout $i \geq 1$, considérons l'évènement $A_i = \text{"on tire pile au } i\text{-ième lancer"}$, c'est-à-dire que A_i est l'évènement élémentaire $\{i\}$, et calculons sa probabilité :

$$P(A_i) = \sum_{n \in \{i\}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \times \frac{1}{3},$$

ce qui correspond effectivement à la probabilité d'avoir obtenu "face" $i - 1$ fois puis finalement "pile".

...

Exemple 2 (suite)

Pile ou face éventuellement infini

Posons maintenant $B_i = \text{"on a obtenu "face" au } i^{\text{ème}} \text{ lancer, c'est-à-dire}$

$$B_i = \bigcup_{n=i+1}^{+\infty} A_n = \{i+1, i+2, \dots\}.$$

Puisque les évènements $(A_n)_{n \geq 1}$ sont incompatibles deux à deux, la σ -additivité de P nous donne

$$\begin{aligned} P(B_i) &= \sum_{n=i+1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=i+1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^i \times \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^p = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^i \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^i \end{aligned}$$

ce qui correspond effectivement à la probabilité d'avoir obtenu "face" i fois (et peu importe pour les lancers suivants).

Remarque

En pratique

Dans les exercices, sauf exception, on ne demande jamais d'expliciter la probabilité P , on se contente de calculer $P(A)$ selon ce que dicte l'intuition compte tenu de l'énoncé.
Par exemple, pour reprendre l'exemple précédent à propos du lancer de pièce, si l'énoncé d'un exercice dit qu'on joue à une pile ou face avec une pièce truquée ayant une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur "face", jusqu'à tant qu'on tombe sur "pile", alors on écrit directement que $P(A_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \times \frac{1}{3}$ et $P(B_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^i$ pour tout $i \geq 1$.

Exemple 3

On lance un dé équilibré jusqu'à ce qu'on tombe sur 6. On note A_i l'évènement "le 6 tombe au $n^{\text{ième}}$ lancer" et $B = \text{"à la fin du jeu, on aura lancé le dé un nombre pair de fois."}$

- 1 Calculer $P(A_i)$ pour tout $i \geq 1$.
- 2 Exprimer B en fonction des évènements $(A_i)_{i \geq 1}$.
- 3 En déduire $P(B)$.

3.2 Propriétés d'une probabilité

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \geq n_0}$ est un système complet d'évènements, alors la série $\sum_{n \geq n_0} P(A_n)$ converge et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

Propriétés rapportées du chapitre 5

- 1 Pour tout évènement A , on a
- 2 Pour tous évènements A et B , si $A \subset B$, alors

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

$$P(A) \leq P(B).$$

- 3 Formules du crible : pour tous évènements A, B, C ,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B), \\ P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Définition

Ensembles négligeables et propriétés presque sûres

Si $P(A) = 0$, on dit que l'évènement A est négligeable.
Si $P(A) = 1$, on dit que A arrive presque sûrement.

Exemple

Reprenons l'exemple 2.

Posons $A = \text{"le jeu s'arrête à un moment donné"} = \text{"on tire pile à un moment donné"}$, c'est-à-dire

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Puisque les évènements $(A_n)_{n \geq 1}$ sont incompatibles deux à deux, la σ -additivité de P nous donne

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^p = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

ainsi on tombe presque sûrement sur "pile" à un moment ou un autre.

Par conséquent, la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais, c'est-à-dire qu'on ne tire jamais "pile", est

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,$$

autrement dit l'évènement $\bar{A} = \text{"Le jeu ne s'arrête jamais"} = \{\infty\}$ est négligeable.

Exercices

Exercices 1 et 2 du TD13.

Propriété

Théorème de la limite monotone (TLM)

- Pour toute suite croissante d'évènements $(A_n)_{n \geq n_0}$ (croissante dans le sens où $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n), on a

$$P\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

- Pour toute suite décroissante d'évènements $(B_n)_{n \geq n_0}$ (décroissante dans le sens où $B_n \supset B_{n+1}$ pour tout n), on a

$$P\left(\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n).$$

Exemple

Reprenons l'exemple 2 et redémontrons en utilisant le théorème de la limite monotone que la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais, c'est-à-dire $P(\{\infty\})$, est nulle.

Pour tout $i \geq 1$, rappelons l'évènement $B_i = \text{"on obtient face au } i^{\text{ème}} \text{ lancer. Il est clair que :}$

- $\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i = \text{"On obtient face à chaque lancer"} = \text{"Le jeu ne s'arrête jamais"} = \{\infty\}.$
- La suite d'évènements $(B_i)_{i \geq 1}$ est décroissante (pour obtenir "face" $(i+1)^{\text{ème}}$ lancer, il faut que le jeu continue au $i^{\text{ème}}$ lancer, c'est-à-dire y obtenir "face" aussi).

Ainsi, par le TLM, on obtient

$$P(\{\infty\}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} P(B_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 0.$$

Exemple

Reprenons l'exemple 1 (on lance un dé équilibré indéfiniment) et calculons la probabilité d'obtenir au moins un 6.

Notons $A_n = \text{"on a obtenu au moins un 6 au cours des } n \text{ premiers lancers"}$. Il est clair que :

- $P(A_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$
- La suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Notons $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \text{"On a obtenu au moins un 6"}$. Par le TLM, on obtient

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1,$$

autrement dit il est presque sûr d'obtenir au moins un 6 au cours de ce jeu.

Corollaire du TLM

Pour toute suite d'évènements $(A_n)_{n \geq n_0}$ (non forcément croissante ou décroissante), on a

$$P\left(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=n_0}^n A_k\right),$$
$$P\left(\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n_0}^n A_k\right).$$

Démonstration

On pose $B_n = \bigcup_{k=n_0}^n A_k$ et $C_n = \bigcap_{k=n_0}^n A_k$ puis on applique le TLM aux suites $(B_n)_{n \geq n_0}$ et $(C_n)_{n \geq n_0}$ (respectivement croissante et décroissante).

Exemple

On lance un dé équilibré indéfiniment. Notons $S_n =$ "On obtient un 6 au $n^{\text{ième}}$ lancer" puis $S = \bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n =$ "On n'obtient que des 6".
On a donc

$$P(S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n S_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0.$$

Exercices

Exercices 3 et 4 du TD13.

4 Probabilités conditionnelles

La notion de probabilité conditionnelle et la formule des probabilités composées, introduites dans le chapitre 5 pour des espaces probabilisés finis, sont inchangées pour des espaces probabilisés quelconques.

Définition/proposition

Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ un évènement non négligeable (c'est-à-dire $P(A) \neq 0$).
Pour tout évènement $B \in \mathcal{A}$, on nomme *probabilité de B sachant A* le réel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

La fonction $P_A : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1] : B \mapsto P_A(B)$ **est alors une probabilité sur** $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exemple

On joue à pile ou face une infinité de fois avec une pièce rouge. A chaque lancer :

- Si on fait "face", on lance un dé équilibré.
 - Si on obtient 6, on gagne 2 €.
 - Sinon, on perd 1 €.
- Si on fait "pile", on joue à pile ou face avec une pièce bleue équilibrée.
 - Si on fait "pile", on gagne 1 €.
 - Si on fait "face", on ne gagne ni ne perd rien.

Notons $F_i =$ "on obtient face au $i^{\text{ème}}$ lancer de la pièce rouge" pour tout $i \geq 1$, on a donc $\overline{F_i} =$ "on obtient pile au $i^{\text{ème}}$ lancer de la pièce rouge".

Notons aussi $G_i =$ "on gagne de l'argent au $i^{\text{ème}}$ lancer de la pièce rouge".

L'énoncé se traduit par

$$P_{F_i}(G_i) = \frac{1}{6},$$
$$P_{\overline{F_i}}(G_i) = \frac{1}{2}.$$

Propriété

Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ un nombre fini d'évènements tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$.

Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n).$$

Exemple

On lance indéfiniment une pièce ayant une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur "face". On note F_i = "on tombe sur face au $i^{\text{ème}}$ lancer" pour tout $i \geq 1$, puis B_i = "on tombe sur face à chacun des i premiers lancers" = $\bigcap_{k=1}^i F_k$.

On a

$$P(B_i) = P\left(\bigcap_{k=1}^i A_k\right) = \underbrace{P(F_1)}_{\frac{2}{3}} \times \underbrace{P_{F_1}(F_2)}_{\frac{2}{3}} \times \underbrace{P_{F_1 \cap F_2}(F_3)}_{\frac{2}{3}} \times \dots \times \underbrace{P_{\bigcap_{k=1}^{i-1} F_k}(F_i)}_{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

On adapte maintenant la formule des probabilités totales du chapitre 5.

Propriété

Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \geq n_0}$ un système complet d'évènements.

Alors, pour tout évènement $B \in \mathcal{A}$, la série $\sum_{n \geq n_0} P(A_n \cap B) = \sum_{n \geq n_0} P(A_n) \times P_{A_n}(B)$ converge, et

$$P(B) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} P(A_n) \times P_{A_n}(B).$$

Exemple

On lance un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne 6. On gagne le jeu si on a obtenu au moins un 1 avant que cela arrive. Quelle est la probabilité de gagner ce jeu?

Notons A_n = "le jeu se termine au $n^{\text{ième}}$ lancer", pour tout $n \geq 1$, il est clair que $P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$. De plus, si l'on note A_0 l'évènement "le jeu ne se termine jamais", alors $A_0, A_1, A_2, \dots$ forment un système complet d'évènements.

Notons maintenant B = "on perd le jeu". On a $A_0 \cap B = \emptyset$ car on ne peut perdre le jeu que s'il se termine (si on obtient un 6 à un moment donné), ainsi $P(A_0 \cap B) = 0$. Ensuite, pour tout $n \geq 1$, il est clair que

$$P(A_n \cap B) = \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.$$

(On aurait aussi pu arguer du fait que $P_{A_n}(B) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ d'où

$$P(A_n \cap B) = P(A_n) \times P_{A_n}(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{6} \times \frac{4}{5}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.)$$

Ainsi, par la formule des probabilités totales,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = P(A_0 \cap B) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n \cap B) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{6}} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ La probabilité de gagner ce jeu est $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5 Indépendance en probabilité

La définition d'évènements indépendants introduite au chapitre 5 est inchangée.

Définition

Evènements indépendants

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux évènements.
On dit que A et B sont *indépendants* si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

ou, écrit de manière équivalent,

$$P_A(B) = P(B)$$

si $P(A) \neq 0$.

Exemple

On lance à l’infini un objet possédant des faces numérotées (une pièce, un dé). Quand on précise que les lancers sont indépendants, alors les évènements décrivant ce qu’on obtient à chaque lancer sont eux-même indépendants.
Par exemple, si on joue à pile ou face indéfiniment avec une pièce équilibrée, notons $A_i =$ "on obtient pile au $i^{\text{ème}}$ lancer" et $B_i =$ "on obtient face au $i^{\text{ème}}$ lancer" pour tout $i \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \frac{1}{2} \text{ pour tout } i \geq 1, \\ P(B_j) &= \frac{1}{2} \text{ pour tout } j \geq 1, \\ P(A_i \cap B_j) &= \frac{1}{4} = P(A_i)P(B_j) \text{ pour tous } i \neq j. \end{aligned}$$

On adapte ensuite la notion d’évènements mutuellement indépendants aux espaces probabilisés quelconques.

Définition

Evènements mutuellement indépendants

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d’évènements. On dit qu’il s’agit d’*évènements mutuellement indépendants* si pour tout sous-ensemble fini $S \subset I$, on a

$$P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i).$$

Exemple

Les évènements $(A_i)_{i \geq 1}$ ou encore $(B_j)_{j \geq 1}$ sont mutuellement indépendants.