ECE1 : Concours Blanc n°2

Mathématiques

Lundi 11 Juin 2012

Le barème est donné à titre indicatif. Portables et calculatrices interdits.

Exercice 1 - EMLyon 2012 ***(4 points)***

On considère l'application f : $[0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0; +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.

b) Déterminer les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses.

c) Préciser la nature de la branche infinie de Γ.

d) Tracer l'allure de Γ. On admet : $0{,}36 \leq e^{-1} < 0{,}37$.

Exercice 2 EDHEC 2012 ***(3 points)***

On admet que, si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell .$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a, $0 \leq u_n < 1$.

(b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} \right) = \dfrac{1}{2}$

(b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour montrer que : $u_n - 1 \sim_{+\infty} -\dfrac{2}{n}$.

Exercice 3 - EMLyon 2012 ***(5 points)***
On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I : Étude de la matrice B

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système (S_λ) : $(B - \lambda I)X = 0$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$.
Pour quelles valeurs de λ ce système n'est-il pas de Cramer ? Déterminer une base de l'ensemble des solutions pour ces valeurs de λ.

Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$
On admet dans la suite que P est inversible et que $B = PDP^{-1}$.

2. Déterminer l'expression de P^{-1}.
3. Vérifier que $D^2 = 5D - 4I$ et exprimer B^2 comme combinaison linéaire de B et I.
4. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme combinaison linéaire de B et I.

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$
On considère l'application $h : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, $M \longmapsto h(M) = AMB$.
1. Vérifier que h est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle donnée pour h.
3. a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $M \in M_2(\mathbb{R})$.
On note $N = MP$, où P est la matrice définie dans la partie I.
Montrer : $h(M) = \lambda M \Leftrightarrow AND = \lambda N$, où D est la matrice définie dans la partie I.
b) Déterminer les réels λ pour lesquels il existe une matrice N de $M_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A\,N\,D = \lambda N$. À cet effet, on pourra noter $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
c) En déduire les valeurs de λ telles que l'équation $h(M) = \lambda M$ n'admet pas que la solution nulle. Pour $\lambda = -1$, déterminer l'ensemble des matrices M solutions de cette équation.

Exercice 4 - EDHEC 2012 ***(4,5 points)***

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de]0;1[et on pose $q = 1 - p$.

On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q.

On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- soit si l'on a obtenu "Pile"
- soit si l'on a obtenu n fois "Face"

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au $k^{ème}$ lancer ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P) que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n.

(a) Pour tout k de {1, …, n − 1}, déterminer la probabilité $P(T_n = k)$.

(b) Déterminer $P(T_n = n)$.

(c) Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.

(d) Montrer que $\forall\, n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \dfrac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$

(e) Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

2. Loi de X_n.

(a) Donner la loi de X_n .

(b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

3. Loi de Y_n .

(a) Déterminer, pour tout k de {0, …, n − 1}, la probabilité $P(Y_n = k)$.

(b) Déterminer $P(Y_n = n)$.

(c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $E(Y_n)$.

4. Simulation informatique

Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n à l'exécution de l'instruction "Writeln(t, x, y);"

```
Program EDHEC_2012;
VAR n, t, x, y : integer;
      p : real;
Begin
  randomize; t:=0; x:=0; y:=0;
  readln(n);
  while (x = 0) and (t < n) do begin ________;
                                     If random>p then ______
                                                  else _______;
                                end;
writeln(t, x, y);
end.
```

Exercice 5 - ESC 2007 ***(3,5 points)***

On considère un moteur qui fonctionne sans interruption, en émettant du gaz carbonique dans l'atmosphère. On suppose que le moteur subit chaque jour un contrôle de pollution afin de voir si le taux de gaz carbonique émis est réglementaire (Si c'est bien le cas on dira que le contrôle est positif).
On numérote ces contrôles à partir du jour numéro 1 et on les suppose indépendants.
A chacun de ces contrôles la probabilité d'être positif est 3/5 .
Au premier contrôle négatif, les réglages du moteur sont améliorés puis on le soumet le lendemain à une nouvelle série de contrôles indépendants, à raison de un contrôle par jour.
A chacun de ces nouveaux contrôles la probabilité d'être positif est alors de 4/5.
On note dans toute la suite X la variable aléatoire égale au numéro du jour du premier contrôle négatif et Y la variable aléatoire égale au numéro du jour du second contrôle négatif.

1. Justifier que X suit une loi classique, qu'on détaillera, et donner son espérance et sa variance.

2. (a) Donner $Y(\Omega)$. Que s'est-il passé les cinq premiers jours si $(X = 3)$ et $(Y = 5)$ se sont réalisés ?
En déduire que $P((X = 3) \cap (Y = 5)) = \frac{72}{5^5}$
(b) Plus généralement, montrer que pour $i \geq 1$, et $j \geq 2$:
$P((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{j-i-1} \times \frac{1}{5}$ si $i < j$
Quelle est la valeur de $P((X = i) \cap (Y = j))$ si $i \geq j$?
(c) Montrer que pour tout entier naturel $j \geq 2$, $P(Y = j) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^j - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^j$
(d) X et Y sont-elles indépendantes ?
(e) Montrer que Y admet une espérance et déterminer E(Y).