
Mathématiques TD3 : calculs de suites

Exercice 1. Soit $u = (u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 2, \\ u_{n+1} &= 2 - \frac{1}{u_n} \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que le réel u_n existe et appartient à $]1, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$.
2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis l'expression de u_n en fonction de n .
4. Étudier la suite u si u_0 vaut non pas 2 mais 1.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r . Pour tout $n \geq n_0$, on note S_n la somme $\sum_{k=n_0}^n u_k$. Exprimer S_n en fonction de u_{n_0} , r et n .

Exercice 3. Soit $u = (u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \quad \text{pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que le réel u_n existe et appartient à $]0, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$.
2. On pose $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 4. On considère deux suites $u = (u_n)_{n \geq 0}$ et $v = (v_n)_{n \geq 0}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = -1$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - v_n, \\ v_{n+1} &= u_n + 4v_n \end{cases}$$

pour tout $n \geq 0$.

1. Soit $p_n = u_n + v_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ est géométrique, et en déduire l'expression de p_n en fonction de n .
2. En déduire la formule $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$ pour tout $n \geq 0$.
3. Montrer que la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ définie par $z_n = \frac{v_n}{3^n}$ est arithmétique. En déduire l'expression de z_n en fonction de n .
4. Donner les expressions de v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 5. Donner les expressions explicites en fonction de n des termes u_n, v_n et w_n définis par les formules de récurrences suivantes :

$$(a) \begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_{n+1} &= -u_n + 1. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} v_1 &= -4, \\ u_{n+1} &= 2u_n + 2. \end{cases} \quad (c) \begin{cases} w_0 &= 0, \\ w_{n+1} &= -5w_n + 6. \end{cases}$$

Exercice 6. Donner les expressions explicites en fonction de n des termes u_n et v_n définis comme suit :

$$1. \begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 2, \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} v_0 = 1, v_1 = -1, \\ 2v_{n+2} + 3v_{n+1} - 2v_n = 0 \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par récurrence par $(u_0, u_1) = (1, 4)$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.
2. Soit $v_n = \ln(u_n)$, qui est défini pour tout $n \geq 0$ d'après ce qui précède.
 - (a) Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
 - (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis l'expression de u_n .

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2x-1}{x+4}$.

1. Étudier les variations de f .
2. Montrer que le réel u_n défini par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ existe et est majoré par -1 (en d'autres termes, que $u_n \geq -1$).

Exercice 9. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x - \ln(x)$.

1. Étudier les variations de f .
2. Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f (autrement dit, que $f(x) \in [1, 2]$ pour tout $x \in [1, 2]$).
3. Montrer que le réel u_n défini par récurrence par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ existe et appartient à $[1, 2]$.