TD2 ECE1 : sommes de réels

Exercice 1

Calculer $\sum_{k=1}^{5} k^2$ et $\sum_{i=0}^{4} (-1)^k \times (2k+1)$.

Exercice 2

Soit $P_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n \in \mathbb{R}[x]$. Reformuler $P_n(x)$ en utilisant le symbole $\sum$, puis calculer $P_n(1), P_n(-1), P_8(2)$.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$.Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1), \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} (6k^2 + 4k + 1), \quad C = \sum_{p=945}^{2011} 3,$$

$$D = \sum_{k=1}^{2n} k^2(2k-1), \quad E_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i, \quad F_n = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \cdots + (-1)3^n,$$

$$G_n = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{3}{10^\alpha}, \quad H_n = \sum_{j=0}^{2n} \frac{5 \times 2^j}{3^{j+1}}, \quad I_n = \sum_{i=2}^{n+1} 3^{2i+1}.$$

Exercice 4

À l'aide d'un changement d'indice, déterminer

$$S = \sum_{k=20}^{30} (k-20)^2, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \text{ (où } n \geq 1\text{)}, \quad U_n = \sum_{i=5}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^i \text{ (où } n \geq 5\text{)}.$$

Exercice 5

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Pour tout $k \geq 1$, montrer que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ et $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}\right)$.
2. En déduire les valeurs de S_n et T_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$. Calculer

$$\sum_{(i,j) n \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}} (i+j) \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} 2^{i+j}.$$

Exercice 7

Soit $n \geq 1$. Calculer

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \frac{i}{j}, \quad \sum_{0 \leq i \leq j \leq 100} 2^i, \quad \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 3^{i-j}.$$

ECE1 2018–2019