TD1 ECE1 : polynômes

Exercice 1

Sans utiliser le discriminant, factoriser les polynômes

$$P_1(x) = x^2 - 2, P_2(x) = x^2 + 2, P_3(x) = (5x+3)^2 - 4, P_4(x) - 3x^2 + 2x,$$
$$P_4(x) = x^2 + 4x + 3, P_5(x) = 2x^2 - 3x - 2, P_6(x) = 4x^2 - 3x, P_7(x) = -3x^2 + 5x - 2$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a, b, c tels que

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1) = (x+1)^2$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1,0\}$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

Exercice 3

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré (donc $a \neq 0$).

1. Montrer qu'il existe un unique triplet de réels $(\bar{a}, \alpha, \bar{b}) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$P(x) = \bar{a}(x-\alpha)^2 + \bar{b}$$
et déterminer ce triplet.
On appelle *forme canonique de P* l'expression $P(x) = \bar{a}(x-\alpha)^2 + \bar{b}$.
2. Donner la forme canonique des polynômes
$$P_1(x) = x^2 - 5x + 6, P_2(x) = -9x^2 + 6x - 4, P_3(x) = -5x^2 + 2\sqrt{5}x - 6$$
et en déduire leur factorisation.

Exercice 4

Soit $P(x) = 8x^2 + 2x + 1$.

1. En utilisant le discriminant, factoriser P et montrer que $P(x) \geq \dfrac{7}{8}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Redémontrer ces résultats en exprimant la forme canonique de P.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 > 0$.

Exercice 6

Soit $P(x) = 2x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{R}[x]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Etudier, en fonction de x_0, le nombre de solutions de l'équation $P(x) = x_0$.

Exercice 7

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation

$$x^2 + 2(m+2)x + 6 - 2m^2 - m = 0.$$

Exercice 8

Factoriser les polynômes $P(x) = 4x^4 - 4x^2 + 1$ et $Q(x) = 3x^4 + 14x^2 - 5$.

Exercice 9

Soient $M_n(x) = x^n - 1$ et $P_n(x) = x^n + 1$ pour tout $n \geq 0$.

1. (a) Déterminer une racine évidente α de M_n et déterminer $A_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que
$$M_n(x) = (x - \alpha)A_n(x).$$
   (b) Étudier pour quelles valeurs de n le réel -1 est racine de A_n.
   (c) Calculer $\sum_{k=0}^{6} 2^k$.
   (d) Factoriser au maximum M_2, M_3 et M_4.
2. (a) Étudier pour quelles valeurs de n le polynôme P_n possède au moins une racine β, et le cas échéant factoriser P_n par $x - \beta$ (c'est-à-dire trouver $B_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P_n(x) = (x - \beta)B_n(x)$).
   (b) Factoriser au maximum P_2 et P_3.
   (c) Factoriser le polynôme $P_4(x) + 2x^2$. En déduire une factorisation de P_4. Adapter la méthode pour factoriser P_8.
3. Factoriser M_6, M_8.

Exercice 10

Montrer que le polynôme $P(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 1$ est le carré d'un polynôme $Q(x)$ à déterminer.

Exercice 11

Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$.

1. Déterminer une racine évidente de P.
2. En déduire une factorisation de P en un produit de polynômes de degré 1.

Exercice 12

Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 16$.

1. Calculer $P(4)$.
2. En déduire une factorisation de P.

Exercice 13

Factoriser le plus possible dans $\mathbb{R}[x]$ le polynôme $P(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$.