

ECE1 : Devoir Surveillé n°8

Mercredi 25 Mai 2011

Calculatrices interdites – Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (4 points)

On considère la série numérique $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

Pour $N \geq 2$, on pose $S_N = \sum_{n=2}^N \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ et $T_N = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2 - 1}$.

1) a) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

b) En déduire que $\forall N \geq 2, S_N \leq T_N$.

2) a) Montrer que $\forall n \geq 2, \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$

b) En déduire que $T_N = \frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2N+2} \quad \forall N \geq 2$.

c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ est convergente et déterminer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

3) a) Etudier le sens de variation de (S_N) .

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

Exercice 2 (3 points)

Soit X une V.A.R. telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \geq 1, P(X=k) = \frac{3^k}{(k-1)! \times 3e^3}$

1) On pose $Y = X - 1$.

a) Reconnaître la loi de Y .

b) En déduire l'espérance et la variance de X .

2) On pose $Z = \frac{1}{X \times 2^X}$. Montrer que Z admet une espérance et calculer $E(Z)$.

Exercice 3 – HEC 2010 (3 points)

Soit p un réel de $]0; 1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p .

On pose : $Z = \min(X_1, X_2)$.

1. a) Rappeler sans démonstration la valeur de $P([X_1 \leq k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

b) Etablir la relation : $P([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}$.

2. Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 4 - EML 1998 (10 points)

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p , $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

- Reconnaître les lois des variables aléatoires N_V et N_B .
- En déduire l'espérance et la variance de chacune de ces lois.
- Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante : pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i \text{ et } Y = j)$ est l'événement :

"les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)$ -ième est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)$ -ième est verte"

Par exemple, pour la suite de tirages BBBVVBVBB $\dots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. Pour $n \geq 2$, on note C_n l'événement "Les n premières boules tirées sont de la même couleur" et C l'événement "On tire indéfiniment des boules de la même couleur".

- Pour $n \geq 2$, déterminer $P(C_n)$.
- En déduire $P(C)$.

3. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.

c) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

4. Montrer, pour tout (i, j) de $\mathbb{N}^{*2}$: $P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$

5. a) En déduire que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = j) = p^2(1-p)^{j-1} + (1-p)^2p^{j-1}$

b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

6. Démontrer que, si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.