ECE1 : Correction du D.S. n°8

Exercice 1

1) a) Posons f(t) = ln(1 + t) sur [0;x]. $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ $\forall t \in [0;x]$ $1 + t \geq 1$ donc $\frac{1}{1+t} \leq 1$ $f'(t) \leq 1$

D'après l'inégalité des accroissements finis : $f(x) - f(0) \leq 1(x - 0)$ $\ln(1 + x \leq x$

Ou : Posons $f(x) = x - \ln(1+x)$ $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$ $f(0) = 0$

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
f(x)	0 $\nearrow$

Donc $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ $\quad \ln(1+x) \leq x$.

b) $\forall n \geq 2$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ et $n^2 - 1 \leq n^2$ donc $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-1}$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2-1}$

Donc $\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1}$ $\quad S_N \leq T_N$.

2) a) $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{n+1-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{2(n^2-1)} = \frac{1}{n^2-1}$.

b) Donc $T_N = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N-1}\right) - \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2N+2}$

c) $\lim_{N \to +\infty} T_N = \frac{3}{4}$ donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

3) a) $\forall n \geq 2$ $1 + \frac{1}{n^2} \geq 1$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \geq 0$. S_N est la somme partielle d'une série à termes positifs, elle est donc croissante.

b) $\forall N \geq 2$, $S_N \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{2N} - \frac{1}{2N+2} \leq \frac{3}{4}$. (S_N) est croissante et majorée, donc elle converge.

Donc la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Exercice 2

1) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = P(X - 1 = k) = P(X = k+1) = \frac{3^{k+1}}{k! \times 3 \times e^3} = \frac{3^k e^{-3}}{k!}$

Donc $Y \longrightarrow \mathcal{P}(3)$.

b) Donc $E(Y) = 3$ et $V(Y) = 3$. $X = Y + 1$ donc $E(X) = E(Y) + 1 = 4$ $V(X) = 1^2 V(Y) = 3$

2) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k2^k} \times P(X = k) = \sum_{k \geq 1} \frac{3^k}{2^k\, k\,(k-1)!\, 3e^3} = \frac{1}{3e^3} \sum_{k \geq 1} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^k}{k!}$ (série exponentielle)

La série est absolument convergente, donc d'après le théorème de transfert, Z admet une espérance et $E(Z) = \frac{1}{3e^3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(3/2)^k}{k!} = \frac{1}{3e^3}\,(e^{3/2} - 1)$

Exercice 3

1) a) $P(X_1 \leq k) = 1 - q^k$

b) $(X_1 = X_2) = \cup_{k=1}^{+\infty} ((X_1 = k) \cap (X_2 = k))$ (incompatibles)

Donc $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$ (X_1, X_2 indépendants)

$= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)}p^2 = p^2 \times \sum_{k'=0}^{+\infty} (q^2)^{k'}$ (avec $k' = k - 1$) $= p^2 \times \dfrac{1}{1-q^2} = \dfrac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \dfrac{p}{1+q}$

2) $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $(Z > k) = (X_1 > k) \cap (X_2 > k)$ donc $P(Z > k) = P(X_1 > k)P(X_2 > k)$ (par indépendance) $P(Z > k) = q^k \times q^k = q^{2k}$

Or $\forall k \geq 1$, $P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k) = q^{2k-2} - q^{2k} = q^{2k-2}(1 - q^2)$

$= (1 - (1 - q^2))^{k-1}(1 - q^2)$ donc $Z \longrightarrow G(1 - q^2)$.

Ou : Considérons X comme le rang du premier succès lors d'épreuves indépendantes de succès S de probabilité p (idem pour Y avec succès T)

Alors $\forall k \geq 1$, $(Z = k) = \overline{S_1} \cap \overline{T_1} \cap ... \cap \overline{S_{k-1}} \cap \overline{T_{k-1}} \cap (S_k \cup T_k)$

Par indépendance : $P(Z= k) = q \times q \times \ldots \times q \times q \times (1 - q^2) = q^{2(k-1)}(1 - q^2)$

(car $P(S_k \cup T_k) = 1 - P(\overline{S_k} \cap \overline{T_k}) = 1 - q^2$)

$E(Z) = \dfrac{1}{1-q^2}$ $\quad V(Z) = \dfrac{1-(1-q^2)}{(1-q^2)^2} = \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}$

Exercice 4

1. a) A chaque tirage, on a une probabilité p d'obtenir une boule verte. Les tirages sont indépendants, et N_V est le rang du premier succès.

Donc N_V suit la loi géométrique de paramètre p.

De même N_B suit la loi géométrique de paramètre $1 - p$.

b) Donc $E(N_V) = \dfrac{1}{p}$ $\quad V(N_V) = \dfrac{1-p}{p^2}$ $\quad E(N_B) = \dfrac{1}{1-p}$ $\quad V(N_B) = \dfrac{p}{(1-p)^2}$

c) $P((N_V = 1) \cap (N_B = 1)) = 0$ (le premier tirage ne peut pas être à la fois une boule verte et une boule blanche).

Or $P(N_V = 1) = P(V_1) = p \neq 0$ $\quad P(N_B = 1) = P(B_1) = 1 - p \neq 0$

donc $P(N_V = 1)P(N_B = 1) \neq P((N_V = 1) \cap (N_B = 1))$. N_V et N_B ne sont pas indépendantes.

2) a) $C_n = (B_1 \cap \ldots \cap B_n) \cup (N_1 \cap \ldots \cap N_n)$ (incompatibles)

Donc $P(C_n) = p^n + q^n$

b) Si les n+1 premières boules sont de la même couleur, alors les n premières aussi.

Donc $C_{n+1} \subset C_n$.

De plus $C = C_2 \cap C_3 \cap \ldots = \cap_{n=2}^{+\infty} C_n$. D'après la propriété de la limite monotone,

$P(C) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(C_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} p^n + q^n = 0$ car $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$.

L'événement C est négligeable.

2) a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $\forall i \geq 1$, $(X = i) = V_1 \ldots V_i B_{i+1} \cup B_1 \ldots B_i V_{i+1}$

Donc $P(X = i) = p^i(1 - p) + (1 - p)^i p$

b) $\forall N \geq 1$, $\sum_{i=1}^{N} iP(X = i) = \sum_{i=1}^{N} ip^i(1-p) + \sum_{i=1}^{N} i(1-p)^i p = p(1-p) \sum_{i=1}^{N} ip^{i-1} + p(1-p) \sum_{i=1}^{N} i(1-p)^{i-1}$

$0 < p < 1$ et $0 < 1 - p < 1$ donc les séries sont absolument convergentes, donc X admet une espérance et

$E(X) = p(1-p) \times \dfrac{1}{(1-p)^2} + p(1-p) \times \dfrac{1}{(1-(1-p))^2} = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$

c) Posons $f(x) = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1-x}{x}$ sur $]0;1[$

$\forall x \in \,]0;1[$, $f'(x) = \dfrac{1 - x - x(-1)}{(1-x)^2} + \dfrac{-x-(1-x)}{x^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - (1-x)^2}{x^2(1-x)^2} = \dfrac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$

x	0		1/2		1
f '(x)		–	0	+	
f(x)		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Donc E(X) est maximale pour p = 1/2 et son maximum vaut 2.

OU : pour p = 1/2   E(X) = 2

Pour p quelconque, $E(X) - 2 = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p} - 2 = \dfrac{p^2 + (1-p)^2 - 2p(1-p)}{p(1-p)} = \dfrac{(p-(1-p))^2}{p(1-p)}$

$= \dfrac{(2p-1)^2}{p(1-p)} \geq 0$ donc 2 est le minimum de E(X).

3. $(X = i)$ et $(Y = j) = V_1 \ldots V_i B_{i+1} \ldots B_{i+j} V_{i+j+1} \cup B_1 \ldots B_i V_{i+1} \ldots V_{i+j} B_{i+j+1}$

Donc $P((X = i) \text{ et } (Y = j)) = p^i \times (1-p)^j \times p + (1-p)^i \times p^j \times (1-p) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$

4. a) $(X = i)_{i \geq 1}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales : $P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=1}^{+\infty} (p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j)$

$= p^2(1-p)^j \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i-1} + (1-p)^2 p^j \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} = p^2(1-p)^j \sum_{i'=0}^{+\infty} p^{i'} + (1-p)^2 p^j \sum_{i'=0}^{+\infty} (1-p)^{i'}$

(avec i' = i – 1) $= p^2(1-p)^j \times \dfrac{1}{1-p} + (1-p)^2 p^j \times \dfrac{1}{1-(1-p)} = p^2(1-p)^{j-1} + (1-p)^2 p^{j-1}$

b) $\forall N \geq 1$, $\sum_{j=1}^{N} j(p^2(1-p)^{j-1} + (1-p)^2 p^{j-1}) = p^2 \sum_{j=1}^{N} j(1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{N} j p^{j-1}$

Les séries sont absolument convergentes, donc Y admet une espérance et

$E(Y) = p^2 \times \dfrac{1}{(1-(1-p))^2} + (1-p)^2 \times \dfrac{1}{(1-p)^2} = 2$

6) Si $p = \dfrac{1}{2}$: $\forall i \geq 1, \forall j \geq 1$, $P(X = i) = \dfrac{1}{2^i}$ $P(Y = j) = \dfrac{1}{2^j}$ $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{2^{i+j}}$

Donc $P(X = i)P(Y = j) = P((X = i) \cap (Y = j))$ donc X et Y sont indépendantes.