ECE1 : Devoir Surveillé n°7

Mercredi 6 Avril 2011

Exercice 1 – Ecricome 2009 (12,5 points)

A tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel formé des matrices $M(a, b, c)$ où a, b, c sont des réels.

Ainsi : $\mathcal{E} = \{ M(a, b, c) \text{ avec } a, b, c \text{ réels} \}$

Partie I : Recherche d'une base de $\mathcal{E}$.

Donner une base de $\mathcal{E}$ ainsi que sa dimension.

Partie II : Cas particulier de la matrice $M(1, 2, 3)$.

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = M(1, 2, 3)$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. Montrer que $D = P^{-1}AP$.
3. En déduire la matrice A^n en fonction de l'entier n .
4. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$a_0 = 3 \quad b_0 = 2 \quad c_0 = 1 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = 2b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$
- b) En déduire l'expression de X_n en fonction de n , A et X_0 .
- c) Donner l'expression de a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Partie III : Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 1)$

On pose $J = M(1, 1, 1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer les matrices J^2, J^3 . En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n , pour tout entier naturel $n \geq 3$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$[M(1, 1, 1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$

L'écriture obtenue est-elle encore valable pour les entiers $n = 0$ et $n = 1$?

3. En déduire l'écriture matricielle de $[M(1, 1, 1)]^n$.

Partie IV : Cas particulier de la matrice M (1, 1, 2).

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ par :

$$\vec{u} = (1; 0; 0); \vec{v} = (0; 1; 0); \vec{w} = (2; 1; 1)$$

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans la suite, on considère les matrices $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

3. Montrer que la matrice R est inversible et que son inverse est $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que $M(1,1,2) = R \times T \times Q$

4. Sans l'expliciter, écrire $[M(1, 1, 2)]^n$ en fonction de n, Q, R, T .

Exercice 2 – ESC 2009 (7,5 points)

On considère les matrices A, B, D, P, E de $M_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5/3 & -4/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelles valeurs de λ le système $(S_\lambda) \begin{cases} (1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases}$ n'est pas un système de Cramer.

b) Déterminer l'ensemble des solutions pour ces valeurs de λ (on en donnera une base).

c) Calculer la matrice P^{-1} par la méthode du pivot

On admet dans la suite que $A = PDP^{-1}$

d) Vérifier que $P^{-1}BP = E$

2. On définit l'ensemble $\mathcal{X} = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } AM = MB \}$.

a) Montrer que $\mathcal{X}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que : $M \in \mathcal{X} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E$.

c) Montrer que l'équation $DX = XE$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, a pour ensemble

solution l'espace vectoriel $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

e) En déduire que $\mathcal{X} = \text{Vect}(A)$.