ECE1 : Correction du D.S. n°7

Partie I : 1. $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc :

$\mathcal{E} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(A, B, C)$ en posant

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$aA + bB + cC = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ Donc la famille est libre.

Donc A, B, C est une base de $\mathcal{E}$ et $\dim(\mathcal{E}) = 3$.

Partie II : 1. P est inversible car triangulaire supérieure et coefficients diagonaux non nuls.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3/2\, L_3 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ donc $P^{-1}AP = D$.

3. $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

Donc $A^n = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \ldots \times PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$

$\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^{n+1}/2 \\ 0 & 2^n & 2\times 3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & 3^{n+1}/2 - 2^{n+1} + 1/2 \\ 0 & 2^n & -2^{n+1} + 2\times 3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = A^n$

4) a) $\qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n + b_n + c_n \\ 2b_n + 2c_n \\ 3c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ donc $A X_n = X_{n+1}$

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \times X_0$

_ pour n = 0 $\quad A^0 \times X_0 = I \times X_0 = X_0$: vrai au rang 0

_ supposons que $X_n = A^nX_0$ alors $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$

c) Donc $X_n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & 3^{n+1}/2 - 2^{n+1} + 1/2 \\ 0 & 2^n & -2^{n+1} + 2\times 3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 + 3^{n+1}/2 \\ 2\times 3^n \\ 3^n \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a_n = \dfrac{3^{n+1}+3}{2} \\ b_n = 2\times 3^n \\ c_n = 3^n \end{cases}$

Partie III : 1. $J = M(1,1,1) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\forall$ $n \geq 3$, $J^n = 0$.

2. $M(1,1,1) = I_3 + J$ or I_3 et J commuent, donc d'après la formule du binôme de Newton :

$\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $M(1,1,1)^n = (I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k$ J est nilpotente donc pour $n \geq 2$:

$= \binom{n}{0} I_3^n J^0 + \binom{n}{1} I_3^{n-1} J + \binom{n}{2} I_3^{n-2} J^2 = I_3 + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} J^2$

Pour $n = 0$ $M(1,1,1)^0 = I_3$ $I_3 + 0\times J + \dfrac{0(0-1)}{2} J^2 = I_3$ donc vrai

Pour $n = 1$ $M(1,1,1)^1 = M(1,1,1) = I_3 + J$ $I_3 + 1\times J + \dfrac{1(1-1)}{2} J^2 = I + J$ donc vrai aussi.

3. $(M(1,1,1))^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dfrac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie IV 1) Si $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = 0$: $\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ La famille $\mathcal{C}$ est libre.

De plus, dimension($\mathbb{R}^3$) = 3 donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On procède par récurrence :

_ pour $n = 0$ $T^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc vrai au rang 0.

_ supposons que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ alors $T^{n+1} = T^n \times T$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$ donc vrai au rang n+1

Conclusion : $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $RQ = I_3$ donc R est inversible et $R^{-1} = Q$.

4) $[M(1, 1, 2)]^n = (RTQ)^n = RTQRTQ\ldots RTQ = R \times T \times I \times T \times \ldots \times T \times Q = R\,T^n\,Q$.

Exercice 2 1) a) $\begin{cases} (1 - \lambda)x - 2y = 0 \\ -x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + (2 - \lambda)y = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (1 - \lambda)x - 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \quad (2 - \lambda)y \quad = 0 \\ \qquad (\lambda^2 - 3\lambda)z = 0 \quad L_2 \leftarrow (1 - \lambda)L_1 + L_2 \end{cases}$

Donc (S_λ) est de Cramer si $\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda - 3) = 0 \quad \lambda = 0$ ou 3.

b) Pour $\lambda = 0 \quad -x + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow x = 2y \quad \mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

le vecteur est non nul, donc est une base de $\mathcal{S}_0$.

Pour $\lambda = 3 \quad -x - y = 0 \Leftrightarrow y = -x \quad \mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

le vecteur est non nul, donc est une base de $\mathcal{S}_3$.

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1 \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2$ donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -18 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. donc $P^{-1}BP = E$ (donc $B = PEP^{-1}$)

2) a) _ $A \times O = O \quad O \times B = O$ donc $O \in \mathcal{K}$

_ si $M \in \mathcal{K}$,t $M' \in \mathcal{K}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $AM = MB$ et $AM' = M'B$

$A(M + M') = AM + AM' = MB + M'B = (M + M')B$ donc $M + M' \in \mathcal{K}$

$A(\lambda M) = \lambda(AM) = \lambda(MB) = (\lambda M)B$ donc $\lambda M \in \mathcal{K}$.

Donc $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

b) $M \in \mathcal{K} \Leftrightarrow AM = MB \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPEP^{-1}$

$\Leftrightarrow P^{-1}PDP^{-1}MP = P^{-1}MPEP^{-1}P$ ($\times P^{-1}$ à gauche, $\times P$ à droite)

$\Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E$.

c) Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{pmatrix}$

$DX = XE \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = b \\ 0 = 3c \\ 0 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ Donc $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

d) $M \in \mathcal{K} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)E$.

$\Leftrightarrow DX = XE$ (en posant $X = P^{-1}MP$) $\quad \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

Or $X = P^{-1}MP \Leftrightarrow M = PXP^{-1}$. Donc $\quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & -2a \\ -a & 2a \end{pmatrix}$

Donc $\mathcal{K} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(A)$