

**E.C.E.1 Devoir Surveillé n°6**  
**Mercredi 23 Février 2011**

*Le barème est donné à titre indicatif.  
Portables et calculatrices sont interdits.*

**Exercice 1 - Ecricome 2005 (13 points)**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x^2 - x \ln(x) - 1 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

ainsi que la fonction  $g$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$ .

On donne le tableau de valeurs de  $f$  :

$x =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x) \approx$	-0,4	0	0,6	1,6	3	4,7	6,9	9,5

On prendra  $\ln(2) \approx 0,7$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $0$ . En donner une interprétation graphique.
3. a) Étudier la convexité de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et préciser le(s) point(s) d'inflexion éventuel(s) ainsi que le coefficient directeur de la tangente en ce(s) point(s).  
b) Montrer que  $f$  est croissante sur  $]0; +\infty[$ . (on dressera le tableau de variations de  $f$  en précisant la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers l'infini).  
c) Étudier la nature de la branche infinie.  
d) Dans un repère bien choisi, tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ . (sans forcément placer tous les points du tableau).
4. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.  
a) Dresser le tableau de variations de  $f^{-1}$ .  
b)  $f^{-1}$  est-elle dérivable sur  $J$ ? Si oui, exprimer la dérivée  $(f^{-1})'$  en fonction de  $f^{-1}$ .  
c) Tracer la courbe de  $f^{-1}$  dans le même repère.
5. Justifier qu'il existe un unique réel  $x_1$  positif tel que  $f(x_1) = 1$ .  
Utiliser le tableau de valeurs de  $f$  pour déterminer un encadrement de  $x_1$ .

6. On définit la suite  $(u_n)$  par :  $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

- a. Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$
- b. On donne  $g(3/2) \approx 1,73$  et  $g(2) \approx 1,69$ . Montrer que  $g([3/2; 2]) \subset [3/2; 2]$ .
- c. En étudiant les variations de  $g'$ , montrer que :  $\forall x \in [3/2; 2], |g'(x)| \leq \frac{2}{9}$
- d. Montrer que les équations  $x = g(x)$  et  $f(x) = 1$  sont équivalentes. En déduire que le réel  $x_1$  est l'unique solution de l'équation  $x = g(x)$ .
- e. Montrer successivement que pour tout entier  $n$  :  

$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2 \quad |u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1| \quad |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$$
- f. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice 2 (7 points)

Pour  $n \geq 1$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f_n(x) = x + n \ln(x)$

1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $x + n \ln(x) = 0$  admet une unique solution  $x_n$  sur  $]0; +\infty[$ .

2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n \leq 1$ .

3) On admet que  $0,5 \leq x_1 \leq 1$ .

Ecrire un programme Pascal qui détermine une valeur approchée de  $x_1$  à  $10^{-4}$  près.

4) a) Etudier le signe de  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

b) En déduire que la suite  $(x_n)$  est croissante.

c) Montrer que  $(x_n)$  converge.

5) a) Montrer que  $\forall x \in [0;1[, x \leq \ln(1) - \ln(1-x)$

b) Montrer que  $\forall n \geq 1, 1 - \frac{1}{n} \leq x_n$ .

c) En déduire la limite de  $(x_n)$ .

6) Déterminer un équivalent simple de  $\ln(x_n)$ .