ECE1 : Correction du D.S. n°6

Exercice 1

1. Sur $]0; +\infty[$, f est continue car somme de fonction continue.
$\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

2. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 - x\ln(x)}{x} = x - \ln(x)$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0. La courbe de f admet une tangente verticale en 0.

3. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 2x - \ln(x) - 1$ $\qquad f''(x) = 2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x - 1}{x}$.

x	0		1/2		$+\infty$
f "	‖	–	0	+	
convexité	‖	concave		convexe	

Il y a donc un point d'inflexion A d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

Coefficient directeur de la tangente : $f'(1/2) = -\ln(1/2) = \ln(2)$.

x	0		1/2		$+\infty$
f "(x)		–	0	+	
f '(x)		↘		↗	

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \ln\dfrac{1}{2} - 1 = \ln 2 > 0$ donc, comme le minimum de f ' est strictement positif, f ' est strictement positive, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$.

$f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) - 1 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
f(x)	-1 ↗	$+\infty$

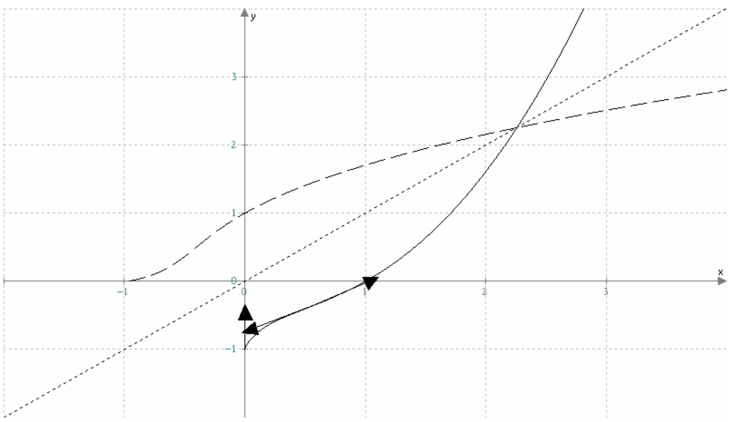
c) $\forall x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = x - \ln(x) - \dfrac{1}{x} = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) - \dfrac{1}{x} \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{\ln(x)}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

donc C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

4. a) f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $f(]0; +\infty[) =]-1; +\infty[$.

b) D'après le tableau de variations de f :

x	-1	$+\infty$
$(f^{-1})(x)$	0 ↗	$+\infty$



c) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable sur $]-1; +\infty[$

et $\forall x \in]-1; +\infty[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{2\times f^{-1}(x) - \ln(f^{-1}(x)) - 1}$

5. Comme $1 \in]-1; +\infty[$, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_1 sur $]0; +\infty[$.
$f(1{,}5) \approx 0{,}6$ $f(x_1) = 1$ $f(2) \approx 1{,}6$ donc $f(1{,}5) \leq f(x_1) \leq f(2)$
Comme f est croissante, $1{,}5 \leq x_1 \leq 2$.

6. a. g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2 + x}{x^2}$.

x	0		2		$+\infty$
g'(x)		–	0	+	
g (x)		↘	$1 + \ln(2)$	↗	

b. g est continue et décroissante sur [3/2;2] donc g([3/2;2]) = [g (2);g (3/2)]
or $\frac{3}{2} \leq g(2)$ et $g\left(\frac{3}{2}\right) \leq 2$ donc $g([3/2;2]) \subset [3/2;2]$.

c. $g''(x) = \frac{x^2 \times 1 - 2x(x-2)}{x^4} = \frac{-x^2 + 4x}{x^4} = \frac{-x + 4}{x^3}$.

x	0		4		$+\infty$
g''(x)		+	0	–	
g'(x)		↗		↘	

g' est croissante sur [3/2;2] $g'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} = -\frac{2}{9}$ $g'(2) = 0$

Donc $\forall x \in [3/2;2]$, $-\frac{2}{9} \leq g'(x) \leq 0$ donc $|g'(x)| \leq \frac{2}{9}$.

d. $x = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{x} + \ln(x) \Leftrightarrow x^2 = 2 + x\ln(x) \Leftrightarrow x^2 - x\ln(x) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$.
Comme l'unique solution de l'équation $f(x) = 1$ est x_1, l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ est également x_1.

e. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$: _ $u_0 = \frac{3}{2} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$
_ si $u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, d'après la question b., $g(u_n) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.
La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, $x_1 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, $|g'(x)| \leq \frac{2}{9}$. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $|g(u_n) - g(x_1)| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$ $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$

Montrons par récurrence sur n que $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$

_ pour n = 0, $|u_0 - x_1| = \left|\frac{3}{2} - x_1\right| = x_1 - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$ car $x_1 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, donc $|u_0 - x_1| \leq 1$. $\left(= \left(\frac{2}{9}\right)^0\right)$

_ si $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$, $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1| \leq \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n$ $|u_{n+1} - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$ la propriété est héréditaire. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$.

f. $-1 < \frac{2}{9} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n - x_1 = 0$ $\lim_{n \to +\infty} u_n = x_1$.

Exercice 2

1) $f_n'(x) = 1 + \frac{n}{x} > 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

f_n est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $0 \in\ ]-\infty; +\infty[$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in\ ]0; +\infty[$.

2) $f_n(x_n) = 0 \quad f_n(1) = 1 \quad f_n(x_n) \leq f_n(1)$ et f_n est croissante, donc $x_n \leq 1$

3)
```
program ds6;
var a,b,c:real;
begin
  a:=0.5;b:=1;
  repeat
     c:=(a+b)/2;
     if c+ln(c)>0 then b:=c
                  else a:=c;
  until b-a<1E-4;
writeln('Une valeur approchée de x1 est ',a);
readln;
end.
```
(On trouve $x_1 \approx 0{,}5671$)

3) $\forall x \in\ ]0; +\infty[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x + (n+1)\ln(x) - (x + n\ln(x)) = \ln(x)$

Donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \begin{cases} \geq 0 \text{ sur } [1, +\infty[\\ \leq 0 \text{ sur }]0, 1] \end{cases}$

$x_n \leq 1$ donc $f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) \leq 0 \quad f_{n+1}(x_n) \leq 0$ Or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ donc $f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$.

Comme f_{n+1} est croissante, $x_n \leq x_{n+1}$. La suite (x_n) est croissante.

c) (x_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge.

3) a) Considérons la fonction $f(t) = \ln(t)$ sur $[1 - x;1]$.

$f'(t) = \frac{1}{t}$ $\quad$ si $t \in [1 - x;1]$, $1 - x \leq t \leq 1 \quad 1 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{1-x}$

Sur $[1-x;1]$, $1 \leq f'(t)$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$1(1 - (1 - x)) \leq f(1) - f(1 - x) \qquad\qquad x \leq \ln(1) - \ln(1 - x)$

b) Donc $\frac{1}{n} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad 1 \leq -n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -1$

$f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} + n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} < 0 \quad f_n(x_n) = 0$ donc $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq f_n(x_n)$

Comme f_n est croissante, $1 - \frac{1}{n} \leq x_n$.

c) $\forall n \geq 1, 1 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq 1$. $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

5) $f_n(x_n) = 0$ donc $x_n + n\ln(x_n) = 0 \quad \ln(x_n) = -\frac{x_n}{n} \quad x_n \sim_{+\infty} 1$ donc $\ln(x_n) \sim -\frac{1}{n}$.