ECE1 : Devoir Surveillé n°5

Mercredi 26 Janvier 2011

Les calculatrices et téléphones portables sont évidemment prohibés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Partie A : Variables aléatoires

Exercice 1 *(2 points)*
Soit $n \geq 1$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1, …., n\}$.
1) Rappeler l'espérance et l'écart-type de X.
2) Déterminer $E(X^3)$, le moment d'ordre 3 de X.
3) Ecrire un programme en Pascal, qui demande un entier n à l'utilisateur, puis calcule et affiche la valeur du moment d'ordre 4 de X correspondant.

Exercice 2 - Ecricome 2008 (3,5 points)
On s'intéresse dans cet exercice à l'étude d'un jeu présent dans une fête foraine.

La mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes.
Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N, ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable. (on précisera l'expression de $P(X_N = k)$ pour $k \in X_n(\Omega)$).
2. Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.

Exercice 3 (4 points)
Soit $n \geq 5$. On considère une urne contenant n boules, dont 3 boules blanches et $n – 3$ boules noires.
On tire au hasard deux boules distinctes de l'urne.
Soit X le nombre de boules blanches tirées.
1) Reconnaître la loi de X. On précisera les valeurs de $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
Vérifier la cohérence de vos résultats.
2) Déterminer l'espérance et la variance de X.

Partie B : Analyse

Exercice 1 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$. Soit (C_f) la courbe de f.

1) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
2) Etudier les branches infinies de C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
On note C_f la courbe de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour (C_f) ?

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
c) Déterminer un équivalent simple de f en 0.

3. a) Etudier les variations de f.
On admet dans la suite que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ *sur* $]-1;1[$*. On appelle g son application réciproque.*
b) Quel est l'ensemble de définition de g ?
c) Déterminer l'expression de g.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
Ecrire un programme Pascal qui calcule les valeurs successives de (u_n) et affiche le premier entier n_0 tel que $|u_{n0}| \leq 10^{-1}$

Exercice 3 - Extrait EML 2008 (3,5 points)

On considère l'application $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;+\infty[$ par :
$$f(t) = \begin{cases} t \ln(t) - t \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$
1. Montrer que f est continue en 0.
2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Préciser la nature de la branche infinie de (C).
3. Etudier le signe de f
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. f est-elle injective ? est-elle surjective ?