ECE1 : Correction du Devoir Surveillé n°5

Partie A

Exercice 1

1) Si $X \longrightarrow U([[1;n]])$, $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$

2) D'après le théorème de transfert,

$$E(X^3) = \sum_{k=1}^{n} k^3 \times P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{n} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)^2}{4}$$

3) D'après le théorème de transfert, $E(X^4) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 \times P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^4$

```
program ds5;
var n,k:integer;
    s:real;
begin
   writeln('Valeur de n ?');
   readln(n);
   s:=0;
   for k:=1 to n do s:= s + k*k*k*k;
   writeln('Le moment d ordre 4 est ',s/n);
   readln;
end.
```

Exercice 2

1. Chaque partie est gagnée avec une probabilité de 1/10.
Il y a N parties indépendantes. X_N désigne le nombre de parties gagnées.
Donc $X_N \longrightarrow B(N, 1/10)$.
Donc $\forall k \in \{0, \ldots, N\}$, $P(X_N = k) = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{N-k}$

$E(X_N) = \dfrac{N}{10}$ $\quad V(X_N) = N \times \dfrac{1}{10} \times \left(1 - \dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{9N}{100}$

2. Mise pour N parties : N parties $\quad$ Gain : $3 \times$ nb de parties gagnées $= 3X_N$
Donc $Y_N = 3X_N - N$.
Donc $E(Y_N) = 3E(X_N) - N = \dfrac{3N}{10} - N = -\dfrac{7N}{10}$ $\quad V(Y_N) = 3^2 V(X_N) = \dfrac{81N}{100}$

Exercice 3

1) Il y a n boules dans l'urne, dont une proportion de 3/n de boules blanches.
On choisit deux boules distinctes et X est le nombre de boules blanches.
Donc $X \longrightarrow H(n, 2, 3/n)$.

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{n-3}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{n-3}{1}}{\binom{n}{2}} = \frac{3(n-3)}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{6(n-3)}{n(n-1)}$$

$P(X = 2) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{n-3}{0}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{3}{\frac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{6}{n(n-1)}$

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{n^2 - 7n + 12 + 6n - 18 + 6}{n(n-1)} = \dfrac{n^2 - n}{n(n-1)} = 1$

2) $X \longrightarrow H(n,2,3/n)$ donc $E(X) = \dfrac{6}{n}$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) = \dfrac{6(n-3)}{n(n-1)} + \dfrac{24}{n(n-1)} = \dfrac{6n+6}{n(n-1)}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{6n+6}{n(n-1)} - \dfrac{36}{n^2} = \dfrac{(6n+6)n - 36(n-1)}{n^2(n-1)} = \dfrac{6n^2 - 30n + 36}{n^2(n-1)}$

$= \dfrac{6(n^2 - 5n + 6)}{n^2(n-1)} = \dfrac{6(n-2)(n-3)}{n^2(n-1)}$

Partie B

Exercice 1

1) $e^x - 1 \sim_0 x$ donc $\dfrac{xe^x}{e^x - 1} \sim_0 \dfrac{xe^x}{x} \sim_0 e^x$ Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant f(0) = 1.

2) <u>En - ∞ :</u> $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Donc C_f admet une asymptote horizontale d'équation y = 0 en - ∞.

<u>En + ∞ :</u> $e^x - 1 \sim_{+\infty} e^x$ donc $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{xe^x}{e^x} \sim x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\dfrac{f(x)}{x} \sim_{+\infty} 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

$f(x) - x = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} - x = \dfrac{xe^x - x(e^x - 1)}{e^x - 1} = \dfrac{x}{e^x - 1} \sim_{+\infty} \dfrac{x}{e^x}$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ (croissances comparées)

(C_f) admet une asymptote oblique d'équation y =x en + ∞.

Exercice 2

1. a) $e^{2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = -1$ impossible, donc $D_f = \mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -f(x)$. Donc f est impaire.

(C_f) est donc symétrique par rapport à l'origine O.

2. a) $\dfrac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} \sim_{+\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}} \sim_{+\infty} 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

(C_f) admet une asymptote horizontale d'équation y = 1.

b) f est impaire donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$ donc $e^{2x} - 1 \sim_0 2x$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} e^{2x} = 1$ donc $e^{2x} + 1 \sim_0 2$

Donc $f(x) \sim_0 \dfrac{2x}{2} \sim_0 x$.

3) a) $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1)2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0$

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
f '(x)	+
f(x)	$-1 \nearrow 1$

b) f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur]-1;1[donc g est définie sur]-1;1[.

c) $\forall$ y $\in$]-1;1[

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1) \Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y$

$\Leftrightarrow (1 - y)e^{2x} = 1 + y \Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1 + y}{1 - y} \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\dfrac{1 + y}{1 - y}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + y}{1 - y}\right)$

Donc $g(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + y}{1 - y}\right)$.

4)
```
program ds5;
var u : real;
    n : integer;
begin
  u := 1;
  n := 0;
  repeat
     u := (exp(2*u)-1)/(exp(2*u)+1);
     n := n + 1;
  until abs(u)<=0.1;
  writeln('n0 vaut ',n);
  readln;
end.
```

Exercice 4

1. $\lim\limits_{t \to 0,\, t > 0} f(t) = \lim\limits_{t \to 0,\, t > 0} t\ln(t) - t = 0$ (croissances comparées) et f(0) =0 donc f est continue en 0.

2. a) $f(t) = t(\ln(t) - 1)$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$

b) $\forall\, t > 0$, $\dfrac{f(t)}{t} = \ln(t) - 1$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t} = +\infty$. Donc (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

3. Sur $]0; +\infty[$, $f(t) = t(\ln(t) - 1)$ du signe de $\ln(t) - 1$

$\ln(t) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(t) > 1 \Leftrightarrow t > e$.

t	0		e		$+\infty$
f(t)	0	–	0	+	

4. Sur $]0; +\infty[$, $f'(t) = t\times\dfrac{1}{t} + 1\times\ln(t) - 1 = \ln(t)$ $\quad \ln(t) > 0 \Leftrightarrow t > 1 \quad f(1) = -1$

t	0		1		$+\infty$
f '(t)		–	0	+	
f(t)	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5. f(0) = 0 et f(e) = 0 donc f n'est pas injective.

f admet un minimum, qui vaut -1, donc f n'est pas surjective. (-2 n'a pas d'antécédent par exemple)