ECE1 : Devoir Surveillé n°4
Mercredi 01 Décembre

L'usage d'une calculatrice ou d'un portable est strictement interdit.
Le barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours *(1,5 points)* :

1) Ecrire le triangle de Pascal jusqu'à n = 5.
2) Enoncer la formule du binôme de Newton (pour n quelconque)
3) En déduire le développement de $(a + b)^5$

Exercice 1 *(1,5 points)*
Ecrire un programme Pascal qui demande un entier n à l'utilisateur et calcule

$$P = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \sqrt{i^2 + 1}\right)$$

Exercice 2 *(2,5 points)*
Dans cet exercice, les résultats qui ne peuvent être calculés en un temps raisonnable seront laissés sous forme de produit ou de puissance.

Soit E l'ensemble des mots de 7 lettres, dont les 7 lettres sont prises dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet latin.
1. Déterminer le cardinal de E.
2. Déterminer le nombre de mots de E contenant 7 lettres différentes.
3. Déterminer le nombre de mots de E contenant exactement 4 fois la lettre K.
4. Déterminer le nombre de mots de E contenant au moins 4 fois la lettre K.
5. Déterminer le nombre de mots de E contenant exactement 2 voyelles.

Exercice 3 *(5 points)*
Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9.
Les boules numérotées de 1 à 5 sont vertes. Les boules numérotées de 6 à 9 sont rouges.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1) Dans cette question, on tire simultanément 4 boules de cette urne.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir la boule n°1 ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir les boules n°1 et 2 ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur ?
d) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules vertes et 1 boule rouge ?

2) Dans cette question, on tire successivement et sans remise 4 boules de cette urne.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir la première boule verte tirée au troisième tirage ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir la deuxième boule verte tirée au quatrième tirage ?

3) Dans cette question, on tire une boule.
Si elle est verte, on la replace dans l'urne. Si elle est rouge, on la replace dans l'urne avec une autre boule rouge. On retire une boule. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Exercice 4 - d'après ECRICOME 93 ***(6 points)***

Les produits référencés X, Y et Z se partagent le marché. Un consommateur n'utilisera qu'un seul de ces produits chaque mois. On note x_n, y_n et z_n, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z au $n^{\text{ième}}$
mois, où n est un entier naturel.
On observe les données suivantes : $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0{,}2$ et $z_0 = 0{,}7$.
Par ailleurs des sondages ont permis de déterminer les intentions des consommateurs supposées constantes:
• Utilisant le produit X un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z le mois suivant sont respectivement de : 40%, 30% et 30%.
• Utilisant le produit Y un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z le mois suivant sont respectivement de : 30%, 40% et 30%
• Utilisant le produit Z un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z le mois suivant sont respectivement de: 20%, 10% et 70%.

1. Exprimer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.

2. Exprimer z_n en fonction de y_n et x_n et en déduire que l'on a pour tout entier n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}1y_n + 0{,}2 \\ y_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}3y_n + 0{,}1 \end{cases}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2x_n - y_n$ et $b_n = x_n + y_n$.
a) Montrer que (a_n) est une suite arithmético-géométrique. En déduire l'expression de (a_n) en fonction de n.
b) Montrer que (b_n) est une suite arithmético-géométrique. En déduire l'expression de (b_n) en fonction de n.
c) Exprimer x_n et y_n en fonction de a_n et b_n, et en déduire que

$$x_n = -\frac{1}{9\times 10^n} - \frac{1}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{18} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{2}{9} - \frac{2}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{9\times 10^n}$$

d) En déduire z_n en fonction de n.

4. Quelles sont à long terme les probabilités d'utiliser les produits X, Y et Z ?

Exercice 5 ***(3,5 points)***

Un restaurant propose 3 menus M_1, M_2 et M_3 et on suppose que chaque client choisit son menu au hasard et indépendamment des autres clients. Un jour donné, n clients se présentent.

1. Quelle est la probabilité que tous les clients choisissent le même menu ?
2. Quelle est la probabilité que le restaurateur doive préparer au moins deux menus ?
3. a) Quelle est la probabilité que le menu M_1 ne soit pas demandé ?
b) Quelle est la probabilité que les menus M_1 et M_2 ne soient pas demandés ?
c) Rappeler la formule du crible pour 3 événements quelconques.
d) Quelle est la probabilité que les trois menus soient demandés ?