

ECE1 : Devoir Surveillé n°3
Jeudi 4 Novembre 2010

Le barème est donné à titre indicatif

On pourra utiliser la valeur approchée suivante : $\frac{\ln(200)}{\ln(9/4)} \approx 6,53$

Exercice 1 (3,5 points)

Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $u_n = n \times (\exp(3/n) - 1)$ b) $v_n = \frac{n^2 - 2^n}{\ln(n) + 3^n}$

c) $w_n = \frac{n - \sqrt{n}}{(\ln(n))^2 + 3}$ d) $z_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

Exercice 2 (2,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$, $u_1 = \frac{1}{6}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, 6u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$

Déterminer l'expression de u_n .

Exercice 3 (3,5 points)

On considère les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{4}{(4k+1)(4k+3)} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{4n+3}.$$

1. Etudier le sens de variation des suites u et v .
2. Montrer que les suites u et v convergent vers une même limite.

Exercice 4 (10,5 points)

On considère la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{8u_n + 2}{2u_n + 5}$ et $u_0 \in \mathbb{R}^+$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{8x+2}{2x+5} \leq 2 + \frac{4}{9}(x-2)$

2. On suppose dans cette question que $u_0 \in [0, 2]$.

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 2]$
- b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
- c) Justifier la convergence de la suite u et donner sa limite.

3. On suppose dans cette question que $u_0 = 4$.

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$.
- b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq 2 + \frac{4}{9}(u_n - 2)$
- c) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - 2 \leq 2 \left(\frac{4}{9}\right)^n$

d) En déduire que la suite u est convergente et donner sa limite.

e) Déterminer un rang n_0 à partir duquel on est sûr que u_n est une valeur approchée de 2 à 10^{-2} près.