ECE1 : Correction du D.S. n°3

Exercice 1 a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $e^{3/n} - 1 \sim_{+\infty} \frac{3}{n}$ donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{3}{n} \times n \sim_{+\infty} 3$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

b) $n^2 - 2^n \sim_{+\infty} - 2^n$ car $n^2 = o(2^n)$ $\ln(n) + 3^n \sim_{+\infty} 3^n$ car $\ln(n) = o(3^n)$ donc $v_n \sim - \frac{2^n}{3^n} \sim - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

c) $\sqrt{n} = o(n)$ et $3 = o(\ln(n)^2)$ donc $w_n \sim \frac{n}{\ln(n)^2}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\ln(n)^2} = + \infty$ (croiss. comp.)

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = + \infty$.

d) $z_n = n - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{(n - \sqrt{n^2 - 1})(n + \sqrt{n^2 - 1})}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{n^2 - \sqrt{n^2 - 1}^2}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n + \sqrt{n^2 - 1} = + \infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0$.

Exercice 2 (u_n) est une suite linéaire récurrente d'ordre 2.

Equation caractéristique : $6X^2 - X - 1 = 0$ $\Delta = 25$ Deux racines : $X_1 = \frac{1}{2}$ $X_2 = - \frac{1}{3}$.

Donc il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(- \frac{1}{3}\right)^n$

Or $u_0 = \lambda \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \mu \left(- \frac{1}{3}\right)^0 = \lambda + \mu = 3$

$u_1 = \lambda \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \mu \left(- \frac{1}{3}\right)^1 = \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{3} = \frac{1}{6}$ Donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 3\lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 5\mu = 8 \quad L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{7}{5} \\ \mu = \frac{8}{5} \end{cases}$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{5}\left(- \frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 3

1. $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{4}{(4k + 1)(4k + 3)} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4}{(4k + 1)(4k + 3)} = \frac{4}{(4(n+1)+1)(4(n+1) + 3)}$

$= \frac{4}{(4n + 5)(4n + 7)} \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

$\forall n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4(n+1) + 3} - \left(u_n + \frac{1}{4n + 3}\right) = u_{n+1} - u_n + \frac{4n + 3 - (4n + 7)}{(4n + 3)(4n + 7)}$

$= \frac{4}{(4n + 5)(4n + 7)} - \frac{4}{(4n + 3)(4n + 7)} = \frac{4(4n + 3) - 4(4n + 5)}{(4n + 3)(4n + 5)(4n + 7)}$

$= - \frac{8}{(4n + 3)(4n + 5)(4n + 7)} < 0$ donc (v_n) est décroissante.

2. (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4n + 3} = 0$.

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Donc elles convergent vers une même limite L.

Exercice 4 1. $\forall x \geq 0$, $2 + \frac{4}{9}(x - 2) - \frac{8x + 2}{2x + 5} = \frac{18(2x + 5) + 4(x - 2)(2x + 5) - 9(8x + 2)}{9(2x + 5)}$

$= \frac{36x + 90 + 8x^2 + 20x - 16x - 40 - 72x - 18}{9(2x + 5)} = \frac{8x^2 - 32x + 32}{9(2x + 5)} = \frac{8(x^2 - 4x + 4)}{9(2x + 5)} = \frac{8(x - 2)^2}{9(2x + 5)}$

(2 racine évidente)

$\forall x \geq 0$, $(x-2)^2 \geq 0$, $2x+5>0$ donc $2+\dfrac{4}{9}(x-2)-\dfrac{8x+2}{2x+5} \geq 0$ donc $\dfrac{8x+2}{2x+5} \leq 2+\dfrac{4}{9}(x-2)$

OU : En étudiant la fonction $f(x) = 2+\dfrac{4}{9}(x-2)-\dfrac{8x+2}{2x+5}$

2. a) 3. (a) On procède par récurrence : _ pour n = 0 : $u_0 \in [0;2]$ d'après l'énoncé

_ supposons que $u_n \in [0;2]$: posons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{8x+2}{2x+5}$

$f'(x) = \dfrac{8(2x+5)-2(8x+2)}{(2x+5)^2} = \dfrac{36}{(2x+5)^2}$ Donc f est croissante sur [0;2].

Comme $0 \leq u_n \leq 2$ $f(0) \leq f(u_n) \leq f(2)$ $0 \leq \dfrac{2}{5} \leq u_{n+1} \leq 2$ la propriété est héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;2]$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{8u_n+2}{2u_n+5}-\dfrac{u_n(2u_n+5)}{2u_n+5} = \dfrac{-2u_n^2+3u_n+2}{2u_n+5}$

2 est racine évidente donc $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(u_n-2)(-2u_n-1)}{2u_n+5}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$ donc $-2u_n-1 \leq 0$, $u_n-2 \leq 0$ et $2u_n+5 \geq 0$

donc $u_{n+1}-u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

c) La suite u est croissante est majorée par 2 donc elle converge vers un nombre réel L.

Comme $u_{n+1} = \dfrac{8u_n+2}{2u_n+5}$, $L = \dfrac{8L+2}{2L+5} \Leftrightarrow (2L+5)L = 8L+2$ $2L^2-3L+2=0$

$(L-2)(-2L-1) = 0 \Leftrightarrow L = 2$ ou $L = -\dfrac{1}{2}$ (ne convient pas car $u_n \geq 0\ \forall n$). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3. a. On procède par récurrence : _ $u_0 = 4 \geq 2$

_ si $u_n \geq 2$, comme f est croissante sur $[0 ;+\infty[$, $f(u_n) \geq f(2)$, donc $u_{n+1} \geq 2$. La propriété est héréditaire. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, donc, d'après la question 1., $u_{n+1} = \dfrac{8u_n+2}{2u_n+5} \leq 2+\dfrac{4}{9}(u_n-2)$

c. On sait déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$ donc $u_n-2 \geq 0$.

On procède par récurrence pour l'inégalité de droite :

_pour n = 0 : $u_0-2 = 4-2 = 2$ $2\times\left(\dfrac{4}{9}\right)^0 = 2$ donc la propriété est vraie pour n=0.

_ supposons que $u_n - 2 \leq 2\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$ alors $\dfrac{4}{9}(u_n-2) \leq 2\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$

D'après la question b, $u_{n+1} \leq 2+\dfrac{4}{9}(u_n-2) \leq 2+2\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$ Donc $u_{n+1}-2 \leq 2\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$

la propriété est héréditaire. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n-2 \leq 2\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

d. $-1 < \dfrac{4}{9} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 2 = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

e) On a $0 \leq u_n-2 \leq 2\times\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.Pour que $u_n-2 \leq 10^{-2}$, il suffit que $2\times\left(\dfrac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{9}\right)^n \leq \dfrac{1}{200} \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{4}\right)^n \geq 200 \Leftrightarrow n\ln\left(\dfrac{9}{4}\right) \geq \ln(200) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(200)}{\ln(9/4)}$

A partir de n = 7, on est sûr que u_n est une valeur approchée de 2 à 10^{-2} près.