

ECE1 : Devoir Surveillé n°2

Mercredi 6 Octobre 2010

Calculatrices interdites / Le barème est donné à titre indicatif

Question de cours (1 point) :

Donner la définition d'une suite arithmético-géométrique.

Exercice 1 (2,5 points)

Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} \end{cases}$$

1) Déterminer l'expression de (u_n) en fonction de n .

2) Pour $n \geq 1$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Exercice 2 (4 points)

Soit $n \geq 1$. Déterminer les sommes doubles

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n} \frac{1}{2^i} \quad T_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^3}{j(j+1)}$$

Exercice 3 (5 points)

Soit u_n la suite définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{2 - u_n} - 1$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $0 < u_n < 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n , puis u_n en fonction de n .

Exercice 4 (4 points)

1) Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$
 Exprimer u_n en fonction de n .

2) Soit (v_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} v_1 = \frac{2}{5} \\ \forall n \geq 1, v_{n+1} = v_n^2 - v_n + 3 \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \geq 1, v_{n+1} \geq v_n + 2$

b) Montrer que $\forall n \geq 1, v_n \geq 2n - \frac{8}{5}$.

Exercice 5 (3,5 points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n k \times k!$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = (n+1)! - 1$

2) a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, k \times k! = (k+1)! - k!$

b) Retrouver de cette manière la formule de (S_n) en fonction de n .