ECE1 : Correction du D.S. n°2

Exercice 1

1) (u_n) est une suite arithmético-géométrique. Point fixe : $c = \frac{1}{2}c + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}c = \frac{3}{2} \Leftrightarrow c = 3$.

Donc $v_n = u_n - 3$ est une suite géometrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

Donc $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ $\quad u_n - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times (u_1 - 3) = \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{4}{2^n}$ $\quad u_n = 3 + \frac{4}{2^n}$.

2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(3 + \frac{4}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} 3 + 4 \times \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3n + 4\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1\right)$

$= 3n + 4\left[2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - 1\right] = 3n + 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3n + 4 - \frac{1}{2^{n-2}}$

Exercice 2

$S_n = \sum_{0 \le i \le n,\ 0 \le j \le n} \frac{j}{2^i} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^i}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2^i}\sum_{j=0}^{n} j\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2^i} \times \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = n(n+1)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$T_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i^3}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} \frac{i^3}{j(j+1)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{j} i^3\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} \times \frac{j^2(j+1)^2}{4}$

$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{4} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2 + j}{4} = \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{24} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)}{12}$

Exercice 3

1) On procède par récurrence :

_ pour $n = 0$ $\ u_0 = 2/3$ donc u_0 existe et $0 < u_0 < 1$

_ supposons que u_n existe et $0 < u_n < 1$

Alors $u_n \neq 2$ donc u_{n+1} existe.

De plus $0 > -u_n > -1$ $\quad 2 > 2 - u_n > 1$ $\quad \frac{1}{2} < \frac{1}{2 - u_n} < 1$ $\quad 1 < \frac{2}{2 - u_n} < 2$

$0 < \frac{2}{2 - u_n} - 1 < 1$ $\quad 0 < u_{n+1} < 1$ la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

2) a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{2 - u_n} - 1 = \frac{2 - (2 - u_n)}{2 - u_n} = \frac{u_n}{2 - u_n}$

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{2}{2 - u_n} - 1 - 1}{\frac{2}{2 - u_n} - 1} = \frac{\frac{2 - 2(2 - u_n)}{2 - u_n}}{\frac{2 - (2 - u_n)}{2 - u_n}} = \frac{2u_n - 2}{u_n} = 2\,\frac{u_n - 1}{u_n} = 2v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

Donc $\forall\, n \geq 1$, $v_n = v_0 \times q^n$ $\quad v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0} = \dfrac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad v_n = -\dfrac{1}{2} \times 2^n = -2^{n-1}$

$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \Leftrightarrow u_n v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1}{1 - v_n}$ Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{1 + 2^{n-1}}$

Exercice 4

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison r = 2.

Donc $\forall\, n \geq 1$, $u_n = u_1 + (n - 1)r = \dfrac{2}{5} + 2(n - 1) = 2n - \dfrac{8}{5}$

2) a) $\forall\, n \geq 1$, $v_{n+1} - (v_n + 2) = v_n^2 - v_n + 3 - (v_n + 2) = v_n^2 - 2v_n + 1 = (v_n - 1)^2 \geq 0$

Donc $\forall\, n \geq 1$, $v_{n+1} \geq v_n + 2$.

b) On procède par récurrence :

_ pour n = 1 $\quad v_1 = \dfrac{2}{5}$ $\quad 2 \times 1 - \dfrac{8}{5} = \dfrac{10 - 8}{5} = \dfrac{2}{5}$ donc vrai au rang 1.

_ supposons que $v_n \geq 2n - \dfrac{8}{5}$

$v_{n+1} \geq v_n + 2 \geq 2n - \dfrac{8}{5} + 2$ $\quad v_{n+1} \geq 2(n + 1) - \dfrac{8}{5}$ la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall\, n \geq 1$, $v_n \geq 2n - \dfrac{8}{5}$.

Exercice 5

1. On procède par récurrence :

Pour n = 0 $\quad S_0 = \sum_{k=0}^{0} k \times k! = 0 \times 0! = 0$ $\quad (0 + 1)! - 1 = 1 - 1 = 0$ donc vrai au rang 0.

Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n + 1)! - 1$

Alors $\sum_{k=0}^{n+1} k \times k! = \sum_{k=0}^{n} k \times k! + (n + 1) \times (n + 1)! = (n + 1)! - 1 + (n + 1)(n + 1)!$

$= (n + 2)(n + 1)! - 1 = (n + 2)! - 1$ la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = (n + 1)! - 1$

2. a) $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $(k + 1)! - k! = (k + 1) \times k! - k! = (k + 1 - 1) \times k! = k \times k!$

b) Donc $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \times k! = \sum_{k=0}^{n} ((k + 1)! - k!) = \sum_{k=0}^{n} (k + 1)! - \sum_{k=0}^{n} k!$ (sommes télescopiques)

$= (1! + \ldots + n! + (n + 1)!) - (0! + 1! + \ldots + n!) = (n + 1)! - 0! = (n + 1)! - 1$