

ECE1 : Correction du D.S. n°1

Exercice 1

1) 2 est une racine évidente, donc on peut factoriser le polynôme par $x - 2$.

$$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

Par identification des coefficients :
$$\begin{cases} a = -2 \\ b - 2a = 5 \\ c - 2b = 8 \\ -2c = -20 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 10 \end{cases} \quad \text{Donc } P(x) = (x - 2)(-2x^2 + x + 10)$$

-2 est racine évidente donc $P(x) = (x - 2)(x + 2)(-2x + 5)$

2) $-2x^3 + 6x^2 - 5 > x^2 - 8x + 15 \Leftrightarrow -2x^3 + 5x^2 + 8x - 20$. Donc il faut étudier le signe de $P(x)$

x	$-\infty$	-2	2	5/2	$+\infty$
$x - 2$		-	-	0	+
$-2x^2 + x + 10$		-	0	+	0
P(x)		+	0	-	0

Donc $S =]-\infty; -2[\cup]2; 5/2[$

Exercice 2

C'est une équation du second degré. $\Delta = (2a)^2 - 4(3a^2 - 3a + 1) = 4a^2 - 12a^2 + 12a - 4 = 4(-2a^2 + 3a - 1) = 4(a - 1)(-2a + 1)$ (1 racine évidente)

a	$-\infty$	1/2	1	$+\infty$
Δ_a		-	0	+

Pour $a < 1/2$ et $a > 1$, l'équation n'a pas de solution. Pour $a = 1/2$ et $a = 1$, l'équation admet une solution. Pour $1/2 < a < 1$, l'équation admet deux solutions.

Exercice 3

$$S_n = \sum_{i=0}^{2n} (i - 1)(i + 1) = \sum_{i=0}^{2n} (i^2 - 1) = \sum_{i=0}^{2n} i^2 - \sum_{i=0}^{2n} 1 = \frac{2n(2n + 1)(4n + 1)}{6} - (2n + 1)$$

$$= \frac{n(2n + 1)(4n + 1)}{3} - \frac{3(2n + 1)}{3} = \frac{(2n + 1)(4n^2 + n - 3)}{3}$$

$$T_n = \sum_{k=2}^n \frac{4}{5^k} = 4 \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{5}\right)^k = 4 \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{5}\right)^k - \left(\frac{1}{5}\right)^0 - \left(\frac{1}{5}\right)^1 \right) = 4 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} - 1 - \frac{1}{5} \right)$$

$$= 4 \left(\frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}} \right) - \frac{6}{5} \right) = 5 - \frac{5}{5^{n+1}} - \frac{24}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5^n}$$

Exercice 4

Posons $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Alors $f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$

$e^x > 0$, $x^2 > 0$ donc f' est du signe de $x - 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$		-	+

$$f(1) = \frac{e^1}{1} = e$$

Donc e est le minimum de f sur $]0; +\infty[$, c'est-à-dire : pour tout $x \in]0; +\infty[$ $\frac{e^x}{x} \geq e$.