ECE1 : Correction du D.M. n°9

Partie I 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3$ et $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $A^3 = A^2 + 2A$ 2. Procédons par récurrence :

_ pour n = 1 : $A^1 = A = 1\times A + 0\times A^2$ $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent

_ supposons que $A^n = a_nA + b_nA^2$: alors $A^{n+1} = A^n \times A = a_nA^2 + b_nA^3$

$= a_nA^2 + b_n(A^2 + 2A) = 2b_nA + (a_n + b_n)A^2$

En posant $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, on a : $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}A^2$.

Conclusion : $\forall$ n $\geq$ 1, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nA^2$

3. a) $\forall n \geq 1,\ a_{n+2} = 2b_{n+1}\ \ 2a_n + 2b_n = 2a_n + a_{n+1}$

b) (a_n) est donc une suite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants.

Equation caractéristique : $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$

Donc il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \geq 1,\ a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$

Donc $a_1 = \lambda(-1)^1 + \mu 2^1 = -\lambda + 2\mu = 1$ Comme $a_2 = 2b_1 = 0$ $\lambda(-1)^2 + \mu 2^2 = \lambda + 4\mu = 0$

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = 1 \\ \lambda + 4\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = 1 \\ 6\mu = 1 \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2\mu - 1 = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3} \\ \mu = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Donc $\forall n \geq 1,\ a_n = -\dfrac{2}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n$ et donc $b_n = \dfrac{1}{2}a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{3}(-1)^{n+1} + \dfrac{1}{6}2^{n+1}\right) = \dfrac{1}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n$

Donc $A^n = \dfrac{1}{6}\left((-4(-1)^n + 2^n)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (2(-1)^n + 2^n)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\times(-1)^n + 4\times 2^n & -2\times(-1)^n + 2\times 2^n & -2\times(-1)^n + 2\times 2^n \\ -2\times(-1)^n + 2\times 2^n & 2\times(-1)^n + 2^n & 2\times(-1)^n + 2^n \\ -2\times(-1)^n + 2\times 2^n & 2\times(-1)^n + 2^n & 2\times(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$

4. $A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1}...PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$

$\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-1)^n & 0 & 2\times 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 4\times 2^n & -2(-1)^n + 2\times 2^n & -2(-1)^n + 2\times 2^n \\ -2(-1)^n + 2\times 2^n & 2(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \\ -2(-1)^n + 2\times 2^n & 2(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$

On retrouve le même résultat.

2ème partie : 1) _ $A \times O + O \times A = O + O = O$ donc $O \in \mathcal{E}$.

_ si $M \in \mathcal{E}$ et si $M' \in \mathcal{E}$, on a : $AM + MA = 0$ et $AM' + M'A = 0$

Donc $A(M + M') + (M + M')A = AM + MA + AM' + M'A = 0 + 0 = 0$ Donc $M + M' \in \mathcal{E}$.

_ si $M \in \mathcal{E}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$: on a $AM + MA = 0$

Donc $A(\lambda M) + (\lambda M)A = \lambda(AM + MA) = \lambda\times 0 = 0$ donc $\lambda M \in \mathcal{E}$.

Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

2) Donc $\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e/2 & -e/2 \\ 0 & -e/2 & e/2 \end{pmatrix}, e \in \mathbb{R}\right\} = \left\{e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, e \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right)$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ Cette matrice est non nulle (donc libre), donc elle forme une base de $\mathcal{E}$.