

ECE1 : Devoir à la maison n°8

Exercice 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système : $(S_\lambda) : \begin{cases} (-3 - \lambda)x - 2y + 8z = 0 \\ 2x + (2 - \lambda)y - 4z = 0 \\ -2x - y + (5 - \lambda)z = 0 \end{cases}$

1. Déterminer pour quelles valeurs de λ ce système est un système de Cramer.
2. Résoudre ce système pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = 2$.

Exercice 2

On considère les matrices suivantes de $M_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

On admet dans la suite que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 2) a) Déterminer à l'aide de coefficients indéterminés, l'ensemble des matrices N de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $DN + ND = 0$.
b) Montrer que, pour tout $M \in M_3(\mathbb{R})$,
$$AM + MA = 0 \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) + P^{-1}MPD = 0.$$

c) En déduire l'expression des matrices M solutions de l'équation $AM + MA = 0$.