Exercice 1

$$\begin{cases} (-3-\lambda)x - 2y + 8z = 0 \\ 2x + (2-\lambda)y - 4z = 0 \\ -2x - y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (2-\lambda)y - 4z = 0 \\ (-3-\lambda)x - 2y + 8z = 0 \\ -2x - y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{cases} 2x + (2-\lambda)y - 4z = 0 \\ (-\lambda^2 - \lambda + 2)y + (4-4\lambda)z = 0\ 0 \\ (1-\lambda)y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow (3+\lambda)L_1 + 2L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\begin{cases} 2x - 4z + (2-\lambda)y = 0 \\ (4-4\lambda)z + (-\lambda^2 - \lambda + 2)y = 0 \\ (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2$$

Ce système est triangulaire, donc c'est un système de Cramer si et seulement si $4 - 4\lambda = 4(1-\lambda)$ et $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$ sont différents de 0. Donc $\lambda \neq 1$ et 2.

2) Pour $\lambda = 1$: (S_1) : $\begin{cases} 2x - 4z + y = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ avec x et z comme inc. sec., $y = -2x + 4z$ Donc $S_1 = \{(x, -2x+4z, z), x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

Pour $\lambda = 2$: (S_2) : $\begin{cases} 2x - 4z = 0 \\ -4z - 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ avec z comme inc. second. $\begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$ $S = \{(2z, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$ $L_3 \leftarrow L_1 + L_3$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_2 + L_3$ donc P est inversible

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow 3L_1 - L_3$ $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1$ $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ $L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3$ Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) a) Si $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 0 & 2c \\ -d & 0 & 2f \\ -g & 0 & 2i \end{pmatrix}$ Donc $DN + ND = \begin{pmatrix} -2a & -b & c \\ -d & 0 & 2f \\ g & 2h & 4i \end{pmatrix}$

$$DN + ND = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 0 \\ -b = 0 \\ c = 0 \\ -d = 0 \\ 2f = 0 \\ g = 0 \\ 2h = 0 \\ 4i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = 0 \end{cases} \quad \text{Donc } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } e \in \mathbb{R}.$$

b) $AM + MA = 0 \Leftrightarrow PDP^{-1}M + MPDP^{-1} = 0 \Leftrightarrow P^{-1}(PDP^{-1}M + MPDP^{-1})P = P^{-1}0P \Leftrightarrow DP^{-1}MP + P^{-1}MPD = 0$

d) Posons $N = P^{-1}MP$. Alors $AM = MA \Leftrightarrow DN + ND = 0 \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $e \in \mathbb{R}$

Or $N = P^{-1}MP \Leftrightarrow M = PNP^{-1}$. Donc $M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & -e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3e & -3e \\ 0 & -3e & 3e \end{pmatrix}$ Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e/2 & -e/2 \\ 0 & -e/2 & e/2 \end{pmatrix}$, $e \in \mathbb{R}$.