**ECE1 : Devoir à la maison n°7**

On considère les fonctions suivantes :

$\begin{cases} f(x) = 1 + \ln(x+1) \\ h(x) = x - f(x) \end{cases}$ définies sur $]-1; +\infty[$

On note (C) la courbe représentative de la fonction h.

1. Etude de h.
a) Etudier les branches infinies de h.
b) Etudier les variations de h.
c) Tracer la courbe représentative de h dans un repère bien choisi.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. (On ne cherchera pas à calculer $\alpha$).

On admet que le réel $\alpha$ appartient à l'intervalle $[1; 3]$.

On définit la suite $(u_n)$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$

4. Appliquer à f l'inégalité des accroissements finis entre $\alpha$ et $u_n$ et en déduire que pour tout entier naturel n : $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|$. En déduire que pour tout entier n, $\left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.