

1. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = +\infty$ La droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à C_h .

$x - \ln(x+1) - 1 \sim_{+\infty} x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ $\frac{h(x)}{x} \sim_{+\infty} \frac{x}{x} \sim_{+\infty} 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 1$

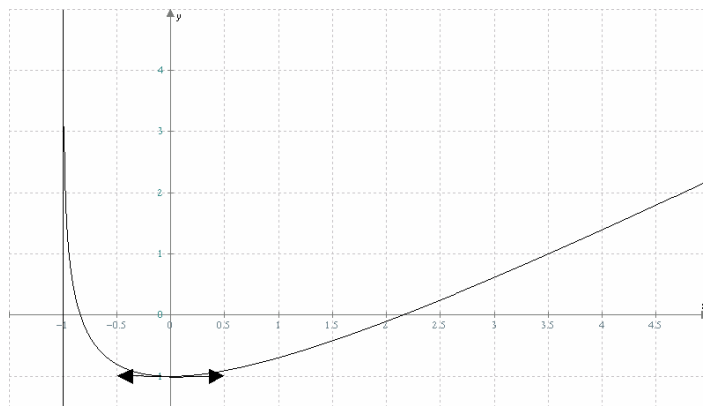
$h(x) - x = -\ln(x+1) - 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - x = +\infty$

C_h admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

b) $\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

x	-1	0	$+\infty$
$h'_p(x)$	-	0	+
$h_p(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$\swarrow$ -1 $\searrow$



2 La fonction h est continue sur $]0; +\infty[$, strictement croissante, et $0 \in]-1; +\infty[$. Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ ($\Leftrightarrow f(x) = x$) admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$.

3. $u_0 = 1$ donc $u_0 \geq 1$

si $u_n \geq 1$ alors $1 + u_n \geq 2$ $\ln(1 + u_n) \geq \ln(2)$ $1 + \ln(1 + u_n) \geq 1 + \ln(2) \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

4 $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc si $x \geq 1$ $1+x \geq 2$ $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{2}$ donc sur $[1; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

De plus, $u_n \in [1; +\infty[$ et $\alpha \in [1; +\infty[$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

pour $n = 0 : |u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = \alpha - 1 \leq 2$ car $\alpha \leq 3$ $\frac{1}{2^{0-1}} = 2$ La propriété est vraie au rang 0.

supposons que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$ La propriété est

héréditaire. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.