ECE1 : Devoir à la maison n°6

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \ f_n(x) = x - n.\ln(x)$.

1. a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.
a) Montrer que $\forall\ n \geq 3,\ 1 < u_n < e$.
b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge.
d) Montrer que $\forall\ n \geq 3,\ \frac{1}{n} \leq \ln(u_n) \leq \frac{e}{n}$. et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
e) En écrivant $u_n = 1 + (u_n - 1)$, montrer que $\ln(u_n) \sim_{+\infty} u_n - 1$.
En déduire que $u_n - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$

3. Etude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \\ f(t) = \sqrt{t} \times \ln(t) \text{ si } t > 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. Interpréter graphiquement les résultats.