ECE1: Correction du D.M. n°6

Exercice 1

1\. a) $f'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$

$\ln(x) =_{+\infty} o(x)$ donc $f_n(x) \sim_{+\infty} x$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ $f_n(n) = n - n\ln(n) = n(1 - \ln(n))$

x	0		n		$+\infty$
$x - n$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ $+\infty$	↘	$n - n\ln(n)$	↗	$+\infty$

b) Si $n \geq 3$ $\ln(n) \geq \ln(3) > 1$ donc $n(1 - \ln(n)) < 0$

Sur $]0;+\infty[$, f_n est continue et strictement décroissante. De plus $0 \in [n - n\ln(n); +\infty[$. Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $]0;n[$.
De la même manière, l'équation admet une unique solution v_n sur l'intervalle $]n; +\infty[$.
Donc $0 < u_n < n < v_n$.

2\. a) $f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1 > 0$ $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ car $n \geq 3$ $f_n(u_n) = 0$
Donc $f_n(e) \leq f_n(u_n) \leq f_n(1)$. f_n est décroissante sur $]0;n]$, donc $1 \leq u_n \leq e$.

b) $f_n(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1}) = u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$
Donc $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
$u_{n+1} \geq 1$ donc $\ln(u_{n+1}) \geq 0$ donc $f_n(u_{n+1}) \geq 0 \Leftrightarrow f_n(u_{n+1}) \geq f_n(u_n)$.
f_n étant décroissante sur $]0;n]$, $u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante.

c) (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc (u_n) converge vers un réel L.

Or $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$. $1 < u_n < e$ donc $\frac{1}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{e}{n}$ donc $\frac{1}{n} \leq \ln(u_n) \leq \frac{e}{n}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = 0$.

$u_n = e^{\ln(u_n)}$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^0 = 1$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 1 = 0$ donc $\ln(1 + (u_n - 1)) \sim_{+\infty} u_n - 1$ (car $\ln(1 + X) \sim_0 X$)

$\Leftrightarrow \ln(u_n) \sim_{+\infty} u_n - 1$

Or $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc $\ln(u_n) \sim \frac{1}{n}$ donc $u_n - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$

3\. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > n$. $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 2

1) Sur $]-\infty;0[$, f est continue car nulle
Sur $]0; +\infty[$, f est continue comme produit de fonctions continues.

En 0 : $\lim\limits_{t \to 0, t \leq 0} f(t) = \lim\limits_{t \to 0, t \leq 0} 0 = 0$ $\lim\limits_{t \to 0, t > 0} f(t) = \lim\limits_{t \to 0, t > 0} \sqrt{t}\ln(t) = 0$ (croissances comparées) donc f est continue en 0.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Sur $]-\infty;0[$, f est dérivable car nulle, sur $]0; +\infty[$, f est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

En 0 : $\lim\limits_{t \to 0, t < 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t \to 0, t < 0} 0 = 0$

$\lim\limits_{t \to 0, t > 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t \to 0, t > 0} \frac{\sqrt{t}\ln(t)}{t} = \lim\limits_{t \to 0, t > 0} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0 (mais dérivable à gauche). C_f admet une demi-tangente horizontale à gauche, et une demi-tangente verticale à droite.