

ECE1 : Devoir à la maison n°5

Exercice 1

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé l'observation suivante : 3 clients sur 5 règlent par carte bancaire.

On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.

La caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 4$).

Chaque achat par carte bancaire coûte 0,05 euros au magasin. De plus l'inscription au service de paiement par carte bancaire coûte 3 euros par jour.

On définit deux variables aléatoires C_n et D_n par :

- _ C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
- _ D_n est le coût pour le magasin des paiements par carte bancaire.

1. Reconnaître la loi de C_n , rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.

2. Exprimer D_n en fonction de C_n . En déduire l'espérance et la variance de D_n .

3. Parmi ces n clients, 2 ont acheté le produit A.

On choisit 3 clients au hasard parmi les n clients de la journée, et on note E_n le nombre de ceux-ci qui ont acheté le produit A.

a) Déterminer la loi de E_n et son espérance.

b) Calculer en particulier $P(E_n = 1)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n = 1)$.

Exercice 2 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère une urne contenant :

- une boule numérotée 1
- deux boules numérotées 2
- ...
- n boules numérotées n .

(pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il y a k boules numérotées k).

On tire une boule dans cette urne. On note X la variable aléatoire représentant le numéro de la boule obtenue.

1) Déterminer le nombre de boules dans l'urne.

En déduire que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X = k) = \frac{2k}{n(n+1)}$

2) a) Montrer que $E(X) = \frac{2n+1}{3}$.

b) Déterminer $V(X)$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie pour t strictement positif par : $f(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{2}{t} \right)$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ecrire un programme Pascal qui détermine et affiche la première valeur de n telle que

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-5}.$$