

**ECE1 : Correction du D.M. n°5**

**Exercice 1** a. Payer par carte bancaire est une épreuve de Bernoulli de probabilité  $\frac{3}{5}$ .

Les achats sont indépendants.  $C_n$  est le nombre de paiements par carte bancaire pour  $n$  achats. Donc  $C_n$  suit la loi binomiale  $B(n, 3/5)$ .

$$\text{Donc } E(C_n) = \frac{3n}{5} \quad V(C_n) = n \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{6n}{25}$$

b. Coût pour le magasin = Coût fixe + Coût par client  $\times$  nb de clients. Donc  $D_n = 3 + 0,05 \times C_n$

$$\text{Donc } E(D_n) = 3 + 0,05E(C_n) = 3 + \frac{3n}{100} \quad V(D_n) = 0,05^2 V(C_n) = \frac{1}{400} \times \frac{6n}{25} = \frac{3n}{5000}$$

3. a) Il y a  $n$  clients en tout, et une proportion de  $2/n$  qui a acheté le produit A.

On choisit 3 clients distincts.  $E_n$  est le nombre de clients ayant acheté le produit A.

$$\text{Donc } E_n \rightarrow H(n, 3, 2/n) \text{ et } E(E_n) = 3 \times \frac{2}{n} = \frac{6}{n}.$$

$$\text{b) } P(E_n = 1) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{n-2}{2}}{\binom{n}{3}}$$

$$\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} \quad \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$P(E_n = 1) = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{6(n-3)}{n(n-1)}. \text{ Donc } P(E_n = 1) \sim_{+\infty} \frac{6n}{n^2} \sim_{+\infty} \frac{6}{n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n = 1) = 0.$$

**Exercice 2**

1) Il y a  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  boules en tout dans l'urne, et  $k$  boules numérotées  $k$ .

$$\text{Donc } P(X = k) = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

$$\text{2) a) } E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{2k^2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$$

$$\text{b) } E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2P(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{2k^3}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9} = \frac{9(n^2+n) - 2(4n^2+4n+1)}{18} = \frac{n^2+n-2}{18}$$

$$= \frac{(n-1)(n+2)}{18}$$

**Exercice 3**

```

program dm5;
var u:real;
    n:integer;
begin
    n:=0;u:=1;
    repeat
        n:=n+1;
        u:=(u+2/u)/2;
    until abs(u-sqrt(2))<1E-5;
    writeln('n vaut ',n);readln;
end.
    
```