D.M. n°4 : Correction

Exercice 1

1) a) Tirages simultanés :

$$\text{card}(\Omega) = \binom{3n}{3} = \frac{(3n)!}{3!(3n-3)!} = \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{6} = \frac{n(3n-1)(3n-2)}{2}$$

Si $A_n =$ "On obtient une boule bleue" alors $\overline{A_n} =$ "On obtient que des rouges"

$$\text{card}(\overline{A_n}) = \binom{2n}{3} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = \frac{n(2n-1)(2n-2)}{3}$$

$$p_n = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \frac{\frac{n(2n-1)(2n-2)}{3}}{\frac{n(3n-1)(3n-2)}{2}} = 1 - \frac{2(2n-1)(2n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

$$\frac{2(2n-1)(2n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \times 2n \times 2n}{3 \times 3n \times 3n} = \frac{8}{27} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

b) Choix de la bleue : $\binom{n}{1} = n$ possibilités

Choix des deux rouges : $\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ possibilités.

$$\text{Donc } q_n = \frac{n^2(2n-1)}{n(3n-1)(3n-2)} = \frac{2n(2n-1)}{(3n-1)(3n-2)} \quad q_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4n^2}{9n^2} \sim \frac{4}{9} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \frac{4}{9}$$

2) a) Tirages successifs avec remise : $\text{card}(\Omega) = (3n)^3 = 27n^3$

$$r_n = 1 - \frac{(2n)^3}{(3n)^3} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{19}{27}$$

b) Choix de la place de la bleue : 3 possibilités choix de la bleue : n possibilités

Choix des deux rouges : $(2n)^2$ possibilités

$$\text{Donc } s_n = \frac{3n(2n)^2}{27n^3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{4}{9}$$

3) On remarque que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

Pour un grand nombre de boules dans l'urne, le fait que les tirages soient avec remise ou sans remise influence peu les probabilités.

Exercice 2

Soit A = "on ne tire pas de cœur" B = "pas de carreau" C="pas de pique" D="pas de trèfle"

$$\text{card}(\Omega) = \binom{32}{8}$$

$$P(A) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} \text{ (carreau, pique ou trèfle)} \quad P(A \cap B) = \frac{\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}} \text{ (pique ou trèfle)}$$

$$P(\text{au moins une couleur n'est pas représentée}) = P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)$$

$$= 4 \times \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} - 6 \times \frac{\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}} + 4 \times \frac{\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}} - 0$$

$$\text{Donc } P(E) = 1 - P(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{\binom{32}{8} - 4 \binom{24}{8} + 6 \binom{16}{8} - 4 \binom{8}{8}}{\binom{32}{8}}$$