ECE1 : Correction du D.M. n°3

Exercice 1

1) a) Les tirages sont successifs et avec remise (éléments non distincts, avec ordre). En tout $11^4 = 14641$ possibilités.

b) $6^4 = 1296$ possibilités de n'avoir que des bleues.

c) Place de la rouge : 4 possibilités   Choix de la rouge : 5   Choix des trois bleues : 6^3

En tout $4 \times 5 \times 6^3 = 4320$

d) Place des deux rouges : $\binom{4}{2} = 6$ poss. (ou : 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4)

Choix des deux rouges : 5^2 Choix des deux bleues : 6^2 En tout : $6 \times 5^2 \times 6^2 = 5400$

e) Aucune boule bleue : $5^4 = 625$ Au moins une boule bleue : $14641 - 625 = 14016$

f) Exactement trois bleues = Exactement une rouge : 4320

Exactement quatre bleues : 1296   En tout : 5616

2) a) Tirages successifs sans remise : $A_{11}^4 = 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7920$ possibilités en tout.

b) $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ possibilités.

c) Place de la rouge : 4 poss.   Choix de la rouge : 5 Choix des trois bleues : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4$

En tout : $4 \times 5 \times 6 \times 5 \times 4 = 2400$ possibilités

d) Place des 2 rouges : 6   Choix des deux rouges : 5×4 Choix des deux bleues : 6×5

En tout : $6 \times 5 \times 4 \times 6 \times 5 = 3600$ possibilités.

e) Aucune boule bleue : $A_5^4 = 5\times4\times3\times2 = 120$ Au moins une boule bleue : $7920 - 120 = 7800$

f) $2400 + 360 = 2760$

3) a) Tirages simultanés : $\binom{11}{4} = \dfrac{11!}{4!7!} = \dfrac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{2 \times 3 \times 4} = 11 \times 10 \times 3 = 330$

b) Aucune boule rouge : $\binom{6}{4} = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$

c) Choix de la rouge : 5 poss.   Choix des 3 bleues : $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 5 \times 4 = 20$

En tout 100 possibilités.

d) Choix des deux rouges : $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$

Choix des deux bleues : $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ En tout 150 possibilités.

e) Aucune boule bleue : $\binom{5}{4} = \dfrac{5!}{4!1!} = 5$ Au moins une boule bleue : $330 - 5 = 325$ possibilités.

f) $100 + 15 = 115$ possibilités.

Exercice 2

1) $\dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$

$\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{k+1} \times \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$ donc $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$

2) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$ Posons $k' = k + 1$

$= \dfrac{1}{n+1}\sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n+1}{k'} = \dfrac{1}{n+1}\left(\sum_{k'=0}^{n+1}\binom{n+1}{k'} - \binom{n+1}{0}\right) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k'=0}^{n+1}\binom{n+1}{k'}1^{k'}1^{n+1-k'} - 1)$

$= \dfrac{1}{n+1}((1+1)^{n+1} - 1) = \dfrac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$