

**ECE1 : Devoir à la maison n°2**

- 1) a) Etudier le signe de l'expression  $x^2 - 2x + 6$   
b) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 6}$ .  
Etudier les variations de  $f$ .  
c) Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de  $f$ .

Soit  $(u_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6} \end{cases}$$

2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq 3$

- 3) a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
b) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge. Déterminer sa limite.

4) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 3 - u_{n+1} = \frac{(3 - u_n)(u_n + 1)}{3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6}}$

b) En remarquant que  $\forall n \in \mathbb{N}, 3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6} \geq 5$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5} (3 - u_n)$$

c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 3 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ . Retrouver la limite de  $u_n$ .