ECE1 : Correction du D.M. n°2

1) a) $\Delta = -20 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 6 > 0$.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+6}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+6}}$. Donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	

c) $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 6} = x \Rightarrow x^2 - 2x + 6 = x^2 \quad -2x = -6 \quad x = 3$.

$f(3) = 3$ Donc 3 est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$.

2) On procède par récurrence : _ $u_0 = 2$ donc $2 \le u_0 \le 3$

_ supposons que $2 \le u_n \le 3$

f est croissante sur [2;3] donc $f(2) \le f(u_n) \le f(3) \quad 2 \le \sqrt{6} \le u_{n+1} \le 3$ la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \le u_n \le 3$.

3) a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \ge u_n$

_ $u_0 = 2 \quad u_1 = \sqrt{6} \ge 2$ donc $u_1 \ge u_0$

_ supposons que $u_{n+1} \ge u_n$. Comme f est croissante sur [2;3] et comme $u_n \in [2;3]$ et $u_{n+1} \in [2;3]$,
$f(u_{n+1}) \ge f(u_n) \quad u_{n+2} \ge u_{n+1}$ la propriété est héréditaire.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \ge u_n$. La suite (u_n) est croissante.

OU : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \le 3 \quad -2u_n \ge -6 \quad -2u_n + 6 \ge 0 \quad u_n^2 - 2u_n + 6 \ge u_n^2 \quad \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6} \ge \sqrt{u_n^2}$
$u_{n+1} \ge u_n$

3) b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle converge.
Le seul point fixe de f est 3, donc (u_n) converge vers 3.

4) a) $3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6} = \dfrac{(3 - \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6})(3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6})}{3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6}}$

$= \dfrac{3^2 - \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6}^2}{3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6}} = \dfrac{9 - (u_n^2 - 2u_n + 6)}{3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6}} = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6}}$

-1 est racine évidente. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 - u_{n+1} = \dfrac{(3 - u_n)(u_n + 1)}{3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6} = 3 + u_{n+1} \quad u_{n+1} \ge 2$ donc $3 + u_{n+1} \ge 5 \quad \dfrac{1}{3 + u_{n+1}} \le \dfrac{1}{5}$

$u_n \le 3$ donc $u_n + 1 \le 4$ Donc $\dfrac{u_n + 1}{3 + u_{n+1}} \le \dfrac{4}{5}$

Comme $3 - u_n \ge 0$, $\dfrac{(3 - u_n)(u_n + 1)}{3 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 6}} \le \dfrac{4}{5}(3 - u_n) \qquad 3 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(3 - u_n)$

c) On sait que $u_n \le 3$ donc $3 - u_n \ge 0$.Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

_ pour n = 0 : $3 - u_0 = 3 - 2 = 1 \quad \left(\dfrac{4}{5}\right)^0 = 1$ donc $3 - u_0 \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^0$

_ supposons que : $3 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$. Alors $3 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(3 - u_n) \le \dfrac{4}{5} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

$3 - u_{n+1} \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$. La propriété est héréditaire. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le 3 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

$-1 < \dfrac{4}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - u_n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.