

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q . Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T . Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T .
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i , on note :

B_i l'événement "la i -ème boule tirée est blanche",

N_i l'événement "la i -ème boule tirée est noire".

1. a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = q p^{k-1} + p q^{k-1}$.

- b) Vérifier : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$

- c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

2. a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$

(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

- b) En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

- c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$

3. Donner la loi de Z et son espérance.

4. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.