**ECE1 : Correction du D.M. n°11 – EML 2009**

**Partie I :** 1. La probabilité d'obtenir une boule noire est q. Les tirages indépendants. T est le nombre d'essais pour obtenir une boule noire. Donc $T \longrightarrow G(q)$. $\forall k \geq 1$, $P(T = k) = p^{k-1} \times q$

$E(T) = \frac{1}{q}$. $V(T) = \frac{1 - q}{q^2} = \frac{p}{q^2}$.

2. On a U = T – 1 donc U admet une espérance et une variance et

$E(U) = E(T) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q}$ $\qquad V(U) = 1^2V(T) = \frac{p}{q^2}$

**Partie II :** 1. a) $\forall k \geq 2$, $(X = k) = B_1\ldots B_{k-1}N_k \cup N_1\ldots N_{k-1}B_k$ (incompatibles, tirages indépendants) donc $P(X = k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p$

b) $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} p^{k-1}q + q^{k-1}p = \sum_{j=1}^{+\infty} p^jq + q^jp$ (en posant j = k – 1)

$= q\sum_{j=1}^{+\infty} p^j + p\sum_{j=1}^{+\infty} q^j = q \times \left(\frac{1}{1-p} - 1\right) + p\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = (1-p) \times \frac{p}{1-p} + p \times \frac{1-p}{p} = p + 1 - p = 1$

c) $\sum_{k \geq 2} kP(X = k) = q \sum_{k \geq 2} kp^{k-1} + p \sum_{k \geq 2} kq^{k-1}$

0 < p < 1 et 0 < q < 1 donc les séries convergent absolument. Donc X admet une espérance et

$E(X) = q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) = q\left(\frac{1}{q^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{p^2} - 1\right) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - p - q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$

2. a) $(X = 2) \cap (Y = 1) = B_1N_2 \cup N_1B_2$ donc $P((X = 2) \cap (Y = 1)) = pq + qp = 2pq$

$\forall k \geq 3$, $P((X = k) \cap (Y = 1)) = P(N_1\ldots N_{k-1}B_k) = q^{k-1}p$

b) $P(Y = 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = 1)) = 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p\sum_{j=2}^{+\infty} q^j$

$= 2pq + p\left(\frac{1}{1-q} - 1 - q\right) = 2pq + \frac{p}{p} - p - pq = pq - p + 1 = pq + q = q(1 + p).$

c) $\forall k \geq 2$, $P(Y = k) = P(B_1\ldots B_kN_{k+1}) = p^kq$.

3. Z et Y ont des rôles symétriques, en remplaçant p par q (et inversement).

Donc $P(Z = 1) = p(1 + q)$ $\quad \forall k \geq 2$, $P(Z = k) = q^kp$ et $E(Z) = \frac{1}{p}(1 - q - q^2)$.

ou : Z = X – Y donc $E(Z) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 - \frac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 - \frac{1}{q} + \frac{p}{q} - \frac{p^2}{q}$

$= \frac{1}{p} - 1 + \frac{p(1-p)}{q} = \frac{1}{p} - 1 + p$

4. $\forall k \geq 1$ :

$(YZ = k) = ((Y = 1)\cap(Z = k)) \cup ((Y = k)\cap(Z = 1))$ car (Y = 1) ou (Z = 1)

= "on a tiré k noires puis une blanche ou k blanches puis une noire"

= "on a tiré k+1 boules en tout"

= (X = k+1) = (X – 1 = k)

donc X – 1 = YZ