ECE1 : Devoir à la maison n°10

Exercice 1

Une urne contient 8 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes.
Un joueur effectue dans celte urne des tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant de tirer la suivante, jusqu'à ce qu'il obtienne :
Soit une boule rouge, auquel cas il a gagne et le jeu s'arrête
Soit une boule verte, auquel cas il a perdu et le jeu s'arrête également.
On désigne par n un entier naturel non nul.
On note A_n , l'événement : " Le joueur est déclaré vainqueur à l'issue du n-ème tirage."
l .a) Calculer $p(A_n)$.
b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur perde ?
3. Quelle est la probabilité que ce jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 2

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel x de [0, 1[, que la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $s_k(x)= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

a) Vérifier, pour tout réel x de [0, 1[: $s_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $s_1(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

b) Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tel que k < n, montrer : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

c) Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de [0, 1[, déduire de la question précédente :
$s_{k+1}(x) = x.s_k(x) + x.s_{k+1}(x)$.

d) Montrer, par récurrence : $\forall\ k \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in [0, 1[,\ s_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.