ECE1 : Devoir à la maison n°10

Exercice 1 (EDHEC 1995) 1) a) $A_n = N_1 \cap \dots \cap N_{n-1} \cap R_n$

Les tirages sont indépendants (car avec remise) donc $P(A_n) = \left(\frac{4}{14}\right)^{n-1}\times\frac{8}{14} = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}\frac{4}{7}$

b) Soit A = "le joueur gagne". Alors $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$

Les $(A_n)_{n \geq 1}$ sont incompatibles, donc $P(A) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}\frac{4}{7}$

avec n' = n – 1 $P(A) = \frac{4}{7}\sum\limits_{n'=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n'} = \frac{4}{7}\times\frac{1}{1-2/7} = \frac{4}{7}\times\frac{7}{5} = \frac{4}{5}$

2) De même, en notant B_n : " Le joueur est déclaré perdant à l'issue du n-ème tirage."

On a $B_n = N_1 \cap \dots \cap N_{n-1} \cap V_n$ donc $P(B_n) = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}\frac{1}{7}$

Avec B = "le joueur perd", on a $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ donc $P(B) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}\frac{1}{7} = \frac{1}{4}P(A) = \frac{1}{5}$

3) Soit C = "le jeu ne s'arrête jamais". Alors P(C) = 1 – P(A) – P(B) = 0.
L'événement est négligeable.

Exercice 2 (EML 2002) a) $s_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{0}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$ car $-1 < x < 1$

$s_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{n}{1}x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\times\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$ car $-1 < x < 1$

b) Pour tous k et n tels que k < n :

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right)$

$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\,\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$. (c'est la formule du triangle de Pascal)

c) Donc $\forall x \in [0;1[$, $xs_k(x) + xs_{k+1}(x) = x\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n + x\sum\limits_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k+1}x^n$

$= \binom{k}{k}x^{k+1} + \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n+1} + \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k+1}x^{n+1} = x^{k+1} + \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right)x^{n+1}$

$= x^{k+1} + \sum\limits_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n+1}{k+1}x^{n+1}$ = (avec n' = n – 1) $\binom{k+1}{k+1}x^{k+1} + \sum\limits_{n'=k+2}^{+\infty}\binom{n'}{k+1}x^{n'} = \sum\limits_{n'=k+1}^{+\infty}\binom{n'}{k+1}x^{n'} = s_{k+1}(x)$

d) _ pour k = 0, $s_0(x) = \frac{1}{1-x}$ $\frac{x^0}{(1-x)^1} = \frac{1}{1-x}$ la propriété est vraie au rang 0

_ supposons que : $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x) \Leftrightarrow s_{k+1}(x)(1-x) = xs_k(x) \Leftrightarrow s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x}s_k(x)$

Donc $s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x}\times\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$ La propriété est héréditaire

Donc $\forall x \in [0;1[$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

ou sans récurrence : $s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x}s_k(x)$ donc s_k est une suite géométrique de raison $\frac{x}{1-x}$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $s_k(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k s_0(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$