ECE1 : Correction du D.M. n°1

Exercice 1 (Ecricome 2010)

1) $Q(1) = 1 - (a + 2)\times 1 + (2a + 1) - a = 1 - a - 2 + 2a + 1 - a = 0$ donc 1 est racine de Q.

2) Donc on peut factoriser Q par $x - 1$. Il existe des réels b, c, d tels que

$Q(x) = (x - 1)(bx^2 + cx + d) = bx^3 + cx^2 + dx - bx^2 - cx - d = bx^3 + (c - b)x^2 + (d - c)x - d$

Par identification des coefficients : $\begin{cases} b = 1 \\ c - b = -(a + 2) \\ d - c = 2a + 1 \\ -d = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -a - 1 \\ d = a \end{cases}$

Donc $Q(x) = (x - 1)(x^2 + (-1 - a)x + a)$

1 est racine évidente, donc $Q(x) = (x - 1)(x - 1)(x - a)$

Conclusion : si $a = 1$, Q a une racine triple : 1

si $a \neq 1$, Q a une racine double : 1, et une racine simple : a.

Exercice 2 1) On cherche P sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Alors $P(x + 1) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c = a(x^2 + 2x + 1) + b(x + 1) + c$

$= ax^2 + (2a + b)x + a + b + c$

Donc $P(x + 1) - P(x) = ax^2 + (2a + b)x + a + b + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax + a + b$

Par identification des coefficients, $P(x + 1) - P(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

De plus $P(1) = a + b + c$ donc $P(1) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ Conclusion : $P(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$

2) La somme $\sum_{k=1}^{n} (P(k + 1) - P(k))$ est une somme télescopique :

$\sum_{k=1}^{n} (P(k + 1) - P(k)) = \sum_{k=1}^{n} P(k + 1) - \sum_{k=1}^{n} P(k)$

$= (P(2) + \dots + P(n) + P(n + 1)) - (P(1) + P(2) + \dots + P(n)) = P(n+ 1) - P(1) = P(n + 1)$

De plus $\forall\, k \in \{1,\dots,n\}$, $P(k + 1) - P(k) = k$ donc $\sum_{k=1}^{n} (P(k + 1) - P(k)) = \sum_{k=1}^{n} k$

Donc $\sum_{k=1}^{n} k = P(n + 1) = \frac{(n + 1)^2}{2} - \frac{n + 1}{2} = \frac{(n + 1)(n + 1 - 1)}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}$